CAPITOLO 3

PROPRIETA' MECCANICHE E TERMICHE DELL'ATMOSFERA STATICA

3.1 - Introduzione.

Riprendendo quanto gia' detto nell'introduzione (paragrafo 1.0), l'esistenza di un modello di atmosfera in moto orizzontale che si mantenga verticalmente "statica", così da corrispondere al suo comportamento osservato nella realtà, è utile in quanto consente di ricavare da esso le leggi di distribuzione verticale di alcuni elementi meteorologici, come la pressione e la densità, leggi che continuano a valere con buona accuratezza nel caso generale dell'aria in movimento orizzontale uniforme.

Per trovare la legge dell'equilibrio statico verticale dell'atmosfera, occorre conoscere tutte le forze che agiscono su di essa. Talune di queste agiscono sia sull'atmosfera in quiete, sia sull'atmosfera in moto, altre agiscono solo sull'atmosfera in moto. In questo Capitolo considereremo moti relativi dell'aria limitati e costanti, essenzialmente orizzontali, tali da non compromettere la condizione di staticità verticale dell'atmosfera. Nel seguito, considereremo quasi sempre forze per unità di massa [N/kg], ossia accelerazioni.

3.2 - Le forze agenti sull'Atmosfera e l'equilibrio statico.

Dal punto di vista più generale, le forze che agiscono nell'atmosfera si suddividono in forze di volume, o esterne, e in forze di superficie, o interne. Le forze del primo tipo sono costituite dalle forze esercitate da sistemi materiali esterni (come, ad esempio, quella esercitata dalla Terra attraverso il suo campo gravitazionale) su ciascun elemento dell'atmosfera considerato separatamente , mentre le ultime derivano dall'interazione mutua di elementi isolati dell'atmosfera con altri elementi atmosferici contigui che li circondano.

Sono, pertanto, *forze esterne* la forza di gravità terrestre e le forze apparenti dovute alla rotazione terrestre, ossia la forza deviante di Coriolis e la forza centrifuga, le quali agiscono sull'intera atmosfera.

Sono invece *forze interne* la forza di pressione e la forza d'attrito.

Poiché la forza di Coriolis e quella di attrito si manifestano solo nell'atmosfera in moto relativo rispetto alla Terra (esse sono infatti proporzionali alla velocità relativa o alle sue potenze), nell'atmosfera statica agiscono esclusivamente le forze di gravità, di pressione e centrifuga. Tenendo conto che la nostra attenzione è rivolta principalmente ai bassi strati dell'atmosfera, considereremo l'accelerazione di gravità $\vec{g}$ costante e uniforme (almeno nelle prime decine di chilometri di altezza) e diretta approssimativamente lungo la verticale locale.

In tali condizioni, pertanto, l'atmosfera potrà restare in quiete, ossia – come detto precedentemente, in equilibrio statico verticale - solo se la risultante vettoriale di tutte le forze, e quella dei loro momenti rispetto a una direzione qualsiasi, si annulleranno (ossia, se la somma delle loro proiezioni lungo una direzione qualsiasi si annulla).

Questa situazione fa sì che, nonostante l'atmosfera sia continuamente in movimento, un suo *modello statico* sia ancora significativo e utile in quanto consente di definire le leggi di distribuzione verticale di alcuni elementi meteorologici, come la pressione e la densità, leggi che continuano a valere con buona accuratezza nel caso generale dell'aria in movimento orizzontale uniforme.

Più avanti, introdurremo i concetti di accelerazione di gravità "assoluta $\vec{g}*$" ed "apparente $\vec{g}$" per tenere conto della correzione che l'osservatore terrestre, non inerziale, deve apportare al valore assoluto, inerziale, della gravità.

E' chiaro che, essendo fissata in ogni punto della superficie terrestre la direzione del campo gravitazionale, conviene assumere quest'ultima come direzione alla quale riferire le risultanti delle forze e dei momenti sopra citati.

Per trovare la legge dell'equilibrio statico dell'atmosfera, occorre conoscere le forze, espresse in Newton (Sistema Internazionale delle Unità di Misura), che agiscono su di essa. Ripetiamo ancora quanto detto precedentemente, ossia che talune di queste forze agiscono sia sull'atmosfera in quiete sia sull'atmosfera in moto, altre agiscono solo sull'atmosfera in moto. Nel seguito, considereremo quasi sempre forze per unità di massa [N/kg], ossia accelerazioni.

Le forze appartenenti alla prima categoria sono la forza gravitazionale:

$$\vec{g} = -g\vec{k} \quad [1] \tag{3.1a}$$

ovvero, più esplicitamente:

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^2}\vec{r} = -\gamma \frac{M}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = -\gamma \frac{M}{a^2}\frac{\vec{r}}{r}\left(\frac{1}{\left[1+\frac{z}{a}\right]^2}\right) \cong -\gamma \frac{M}{a^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{3.1b}$$

[1] il segno negativo è dovuto al verso di $\vec{g}$, che è opposto a quello del versore $\vec{k}$ dell'asse *z*, o verticale locale (vedere figura in questa pagina)

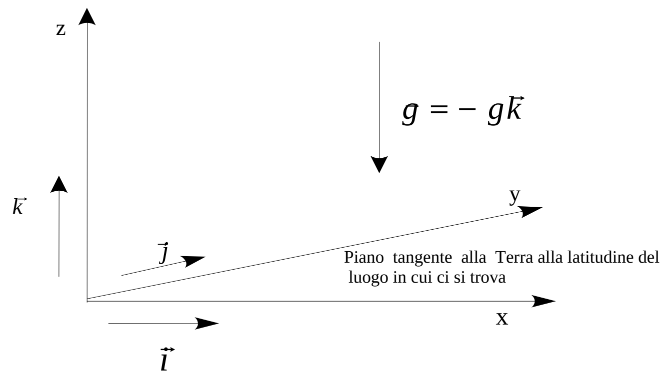


Fig. (3.1)

{dove M è la massa della Terra, γ [= 6.67 · 10^{-11} (m^3 kg^{-1} s^{-2})] è la costante gravitazionale universale, e gli altri simboli sono mostrati nelle figure (3.1)-(3.2)]},

e la forza di gradiente di pressione:

$$\vec{f}_{\nabla p} = -\left\{ \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j} \right]_{z=\cos t} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial p}{\partial z}\vec{k} \right]_{x,y=\cos t} \right\} \qquad (3.2a)$$

ossia:

$$\vec{f}_{\nabla p} = -\frac{1}{\rho}\left[\nabla_{orizz.}\, p + \nabla_{vert.}\, p \right]. \qquad (3.2b)$$

$\vec{f}_{\nabla p}$, nella forma in cui appare nelle due equazioni (3.2a) e (3.2b), rappresenta la forza per unità di massa d’aria (ossia l’accelerazione) esercitata dal gradiente di pressione atmosferica. Anche se, nel complesso, $f_{\nabla p}$ agisce sull’atmosfera sia in moto, sia in quiete, va precisato che la sua componente verticale ($-\frac{1}{\rho}\nabla_{vert}\, p$) è generalmente bilanciata dal vettore $\vec{g}$ (come vedremo) e, per questa ragione, viene considerato prevalentemente nel Capitolo della Statica dell'Atmosfera, eccetto in quei casi in cui il moto orizzontale dell'atmosfera, prodotto da $-\frac{1}{\rho}\nabla_{orizz.}\, p$, produca situazioni che perturbano l'equilibrio fra $\vec{g}$ e $-\frac{1}{\rho}\nabla_{vert}\, p$, dando così luogo ad accelerazioni verticali$\left(\frac{dw}{dt}\right)$ del flusso (atmosfera non idrostatica).

Fra le forze della prima categoria va inclusa anche l'accelerazione centripeta dovuta alla rotazione della Terra intorno al proprio asse e rappresentata da:

$$\vec{f}_c = \vec{\Omega}\, x\, \left(\vec{\Omega}\, x\;\vec{R}\right) = -\Omega^2\vec{R} \tag{3.3}$$

dove $\vec{\Omega}$ e' la velocità angolare della Terra.

Infatti, $\vec{f}_c$ rappresenta <u>la forza centripeta apparente per unità di massa</u> che agisce sia sull'atmosfera in moto, sia su quella in quiete, combinandosi con $\vec{g}$ in entrambi i casi, ossia "modulando" $\vec{g}$ nei moti a grande scala (vedere figure (3.1), (3.2) e (3.3). $\vec{f}_c$ é anche la forza per unità di massa che sarebbe vista da un osservatore inerziale nello spazio.

La figura (3.2) fa distinzione fra la distanza $\vec{R}$ dall'asse di rotazione della Terra di un punto *S* sulla superficie terrestre alla latitudine θ e quella $\vec{R}^*$ di un punto P situato in atmosfera all'altezza *z* sulla verticale locale di *S*. In pratica, poi, si considera la $\vec{R}^* \cong \vec{R}$, come riportato nelle "*Approssimazioni* " [a lato della figura (3.2)].

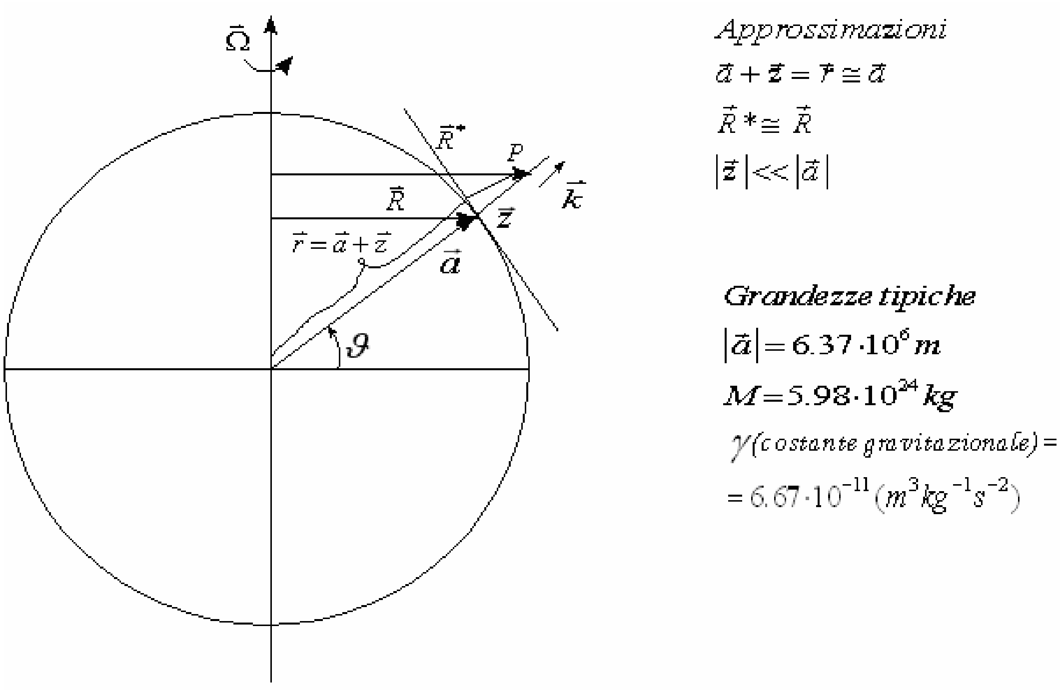

Approssimazioni
$\vec{a}+\vec{z}=\vec{r}\cong\vec{a}$
$\vec{R}^*\cong\vec{R}$
$|\vec{z}|<<|\vec{a}|$
Grandezze tipiche
$|\vec{a}|=6.37\cdot10^6\,m$
$M=5.98\cdot10^{24}\,kg$
γ(costante gravitazionale) =
$=6.67\cdot10^{-11}(m^3kg^{-1}s^{-2})$
$\vec{\Omega}$
$\vec{R}^*$
P
$\vec{R}$
$\vec{k}$
$\vec{z}$
$\vec{r}=\vec{a}+\vec{z}$
$\vec{a}$
ϑ

Fig (3.2)

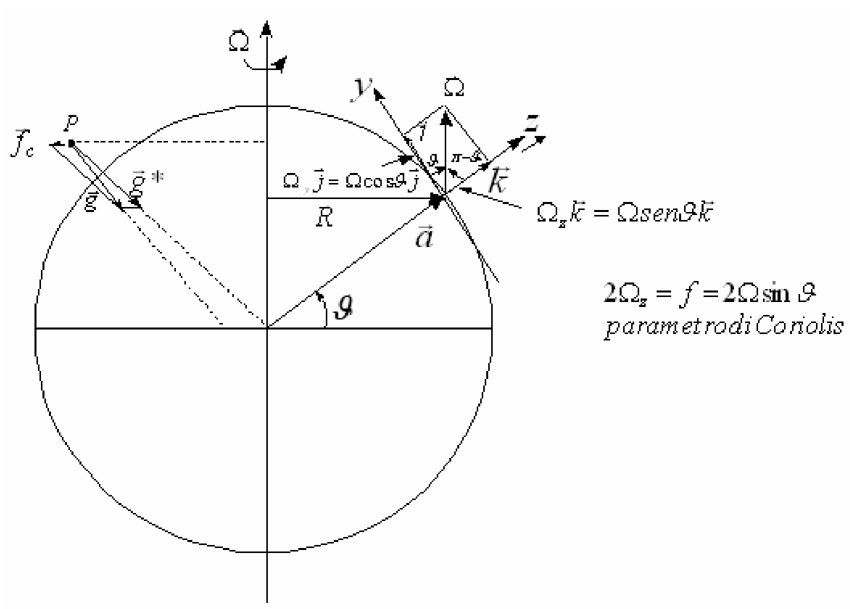

Ω
y
Ω
z
$\vec{f}_c$
P
$\vec{g}^*$
$\vec{g}$
$\Omega_y\vec{j}=\Omega\cos\vartheta\vec{j}$
$\vec{k}$
R
$\Omega_z\vec{k}=\Omega sen\vartheta\vec{k}$
$\vec{a}$
ϑ
$\pi-\vartheta$
$2\Omega_z=f=2\Omega\sin\vartheta$
parametro di Coriolis

Fig. (3.3)

Le forze della seconda categoria sono:

a) - <u>la forza deviante apparente di Coriolis per unità di massa</u>

$$\vec{C}_o = 2\vec{\Omega}\, x\vec{U} = 2\Omega \sin\vartheta \vec{k}\, x\vec{U} = 2\Omega_z \vec{k}\, x\vec{U} = f\vec{k}\, x\vec{U} \qquad (3.4)$$

che agisce solo sull'atmosfera in moto. Essa é definita in termini di $\vec{U}$ e di $\vec{\Omega}$ (o, più precisamente, di *f*, che rappresenta il cosiddetto parametro di Coriolis $\left(f = 2\Omega \sin\vartheta\right)$, essendo ϑ la latitudine).

Il vettore $2\vec{\Omega}$ si divide in una componente $2\Omega_y \vec{j}$ (giacente nel piano tangente locale e diretta verso il Polo) e in una componente $2\Omega_z \vec{k} = f\vec{k}$ (normale al piano tangente locale), detta parametro di Coriolis. Quest'ultima è quella che entra nelle due componenti orizzontali dell'equazione del moto e determina, come vedremo nel Capitolo 5, dedicato alla Dinamica, la deviazione apparente dell'aria nel piano tangente locale, dovuta alla rotazione terrestre alle diverse latitudini θ.

<u>b) – la forza d'attrito fluido per unità di massa dei moti non turbolenti</u>

Tale forza e' genericamente indicata dall'equazione che segue:

(3.5) $\vec{f}_r \equiv -\vec{U}$

ed esprime una relazione di proporzionalita' fra $\vec{f}_r$ *e* $\vec{U}$, la quale puo' essere lineare in certi casi e quadratica (o di ordine superiore) in situazioni di flusso e di topografia del suolo piu' complesse.

Le forze $\vec{g}, \vec{f}_c \; e \; \vec{C}_o$ sono anche dette forze esterne , o di volume, in quanto agiscono su ciascun elemento materiale di atmosfera, considerato separatamente dagli altri, e sono esercitate da altri sistemi materiali esterni (ad esempio, la Terra, che genera $\vec{g}$).

Le forze $\vec{f}_{\nabla p}$ e $\vec{f}_r$ sono anche dette forze interne, o di superficie. Esse, come già detto, derivano dalle interazioni di elementi separati (ma contigui) di atmosfera, attraverso le loro superfici di separazione.

Le figure (3.2) e (3.3) illustrano le relazioni fra i diversi vettori di posizione [$\vec{a}$ = raggio terrestre, $\vec{z}$ = altezza del punto *P* sulla superficie terrestre alla latitudine ϑ, $\vec{r} = \vec{a} + \vec{z}$ (vettore di posizione del punto *P* rispetto al centro della Terra), $\vec{R}^*$ = distanza effettiva del punto *P* rispetto all'asse di rotazione terrestre, $\vec{R}$ = distanza della proiezione del punto *P* sul piano tangente locale dall'asse di rotazione terrestre] e fra il vettore velocità angolare $\vec{\Omega}\left(\frac{radianti}{\mathrm{sec}ondo}\right)$ della Terra e il punto di applicazione delle sue componenti $\Omega_y \; e \; \Omega_z$ alla latitudine ϑ. Inoltre, la figura (3.3) (lato sinistro) mostra l'effetto della composizione del vettore $-\vec{f}_c$ (accelerazione centrifuga) con il vettore $\vec{g}^*$ (gravità terrestre assoluta), da cui deriva il vettore $\vec{g}$ (gravità apparente, o terrestre), il cui modulo e direzione sono entrambi funzione della latitudine. $\vec{g}$ è parallelo a $\vec{g}^*$ (ossia è diretto verso il centro della Terra) solo ai Poli e all'Equatore. Per maggiore chiarezza, riportiamo qui di seguito l'elenco delle approssimazioni adottate e dei valori (e del significato) delle principali grandezze che compaiono nelle equazioni e nelle figure sopra citate.

Approssimazioni adottate	Grandezze tipiche
$\vec{a}+\vec{z}=\vec{r}\cong\vec{a}$ $\vec{R}^*\cong R$ $\lvert\vec{z}\rvert << \lvert\vec{a}\rvert$	$\lvert\vec{a}\rvert = 6.37\cdot 10^6\, m$ $M = 5.98\cdot 10^{24}\, kg$ γ *(costante gravitazionale)* $= 6.67\cdot 10^{-11}\left(m^3 kg^{-1} s^{-2}\right)$ $\vec{g}^*$ = accelerazione di gravità assoluta, $\vec{g}$ = accelerazione di gravità apparente o terrestre

Si può a questo punto scrivere una relazione empirica che dà la variazione del modulo di $\vec{g}$ con la quota z e la latitudine ϑ:

$$g\left(z,\vartheta\right) = g\left(0,\, 45\,^{o}N\right)\left(1 - a_1 \cos 2\vartheta\right)\left(1 - a_2 z\right), \tag{3.6}$$

con

$$g\left(0, 45^{o}N\right) = 9.80665\, ms^{-2}$$
$$a_1 = 0.026$$
$$a_2 = 3.14\cdot 10^{-7}\, m^{-1}$$

3.3 - L’equilibrio idrostatico (o Legge fondamentale della Statica).

In base a quanto detto a proposito dell’equazione (3.1a) e rappresentato nella figura (3.1), consideriamo la verticale locale come la direzione rispetto a cui annullare le risultanti vettoriali delle forze agenti e dei loro momenti (condizioni per l’equilibrio statico).

Con riferimento a una colonna d’aria di sezione S unitaria (1 m^2) e di altezza corrispondente all’intero spessore dell’atmosfera, isoliamo – all’altezza “z” di detta colonna - un parallelepipedo di altezza “dz”: il volume del parallelepipedo sarà quindi dato da Sdz = dz; la massa in esso contenuta sarà ρdz e quindi il suo peso sarà gρdz. Le forze per unità di massa in gioco sono, come già visto, $-\frac{1}{\rho}\nabla_{vert.}p$ e $-g\vec{k}$ (esse sono anche le due uniche forze che possono avere una risultante nulla rispetto all'asse z e i cui momenti sono automaticamente nulli rispetto a tale asse, in quanto sono ad esso parallele).

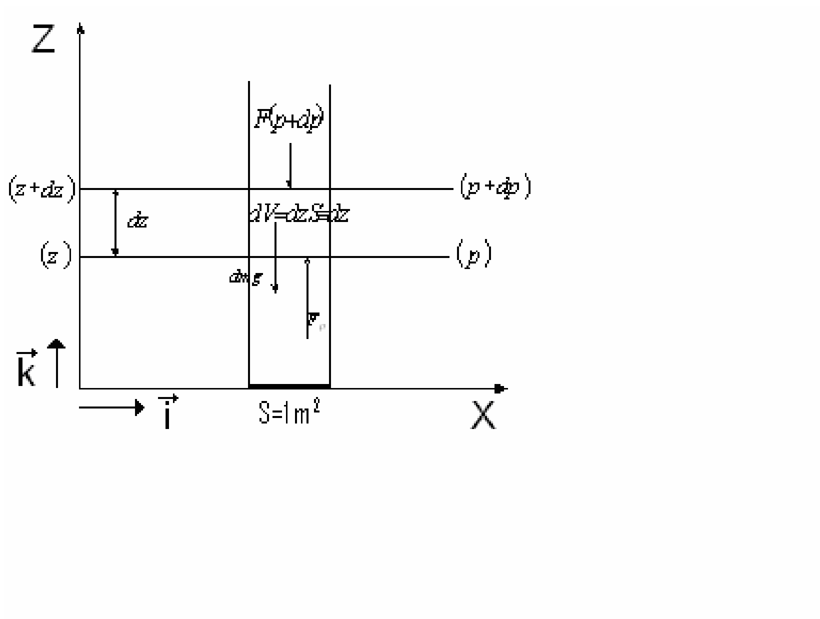


Fig. (3.4)

Con riferimento a quanto detto sopra e alla figura (3.4) si ha allora (essendo la superficie S unitaria):

$$d(m\vec{g}) = -d(mg\vec{k}) = -\rho g dV\vec{k} = -\rho g S dz\vec{k} \equiv -\rho g dz\vec{k}$$

$$\vec{F}_{(p)} = pS\vec{k} \equiv p\vec{k}$$

$$\vec{F}_{(p+dp)} = -(p+dp)S\vec{k} = -(p+dp)\vec{k}$$

All'equilibrio, la componente rispetto all'asse z della risultante di tali forze deve annullarsi:

$$-\rho g dz + p - (p+dp) = 0$$

ossia: $-\rho g dz = dp$ $\leftarrow \begin{cases} se \;\; dz > 0, dp < 0 \\ se \;\; dz < 0, \; dp > 0 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} essendo\ "\rho"\ e\ "g" \\ grandezze\ \ finite\ e\ positive \end{pmatrix}$

da cui:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad [2] \qquad \text{\underline{Legge fondamentale della Statica.}} \tag{3.7}$$

Conseguenze della legge dell'equilibrio statico sono:

a) – la variazione di p con z è proporzionale alla densità locale $\rho(z)$

b) – p è funzione sempre decrescente di z

3.4 - Circolazione di brezza con l'equazione della statica.

Come si appena detto, a ogni livello verticale z la pressione diminuisce sempre con l'aumento della quota e in misura proporzionale alla densità locale $\rho(z)$ (figure (3.5a), (3.5b) e (3.6a).

Consideriamo le due variazioni "locali" della pressione nell'intorno "z-dz" e "z+dz" del livello z mostrate nelle due figure (3.5.a) e (3.5.b).

---

[2] Integrando questa equazione da $(z,\ p)$ a $(\infty, 0)$ [top dell'atmosfera] si ottiene: $-\int_0^p dp = \int_z^\infty \rho g dz$, da cui $-p\Big|_{p(z)}^{0} = p(z)$ = peso della colonna d'aria di 1 m^2 di sezione, sovrastante il livello *z, dato da* $\int_z^\infty \rho g dz$.

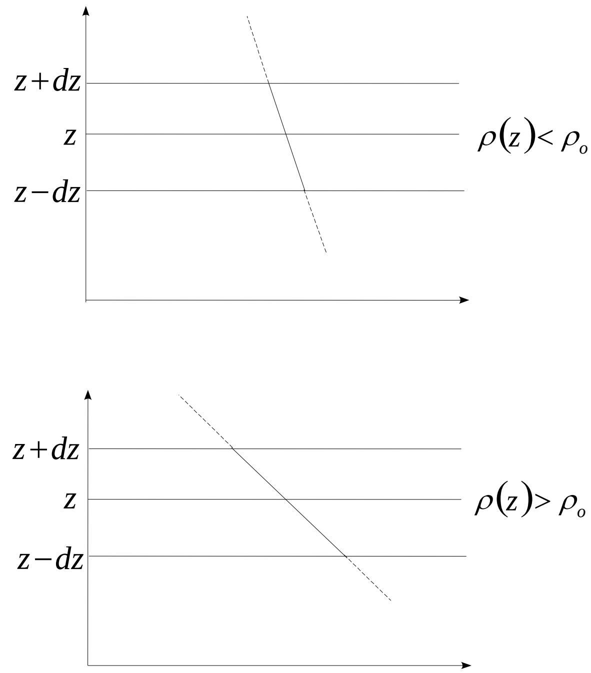


Fig. (3.5.a) e (3.5.b)

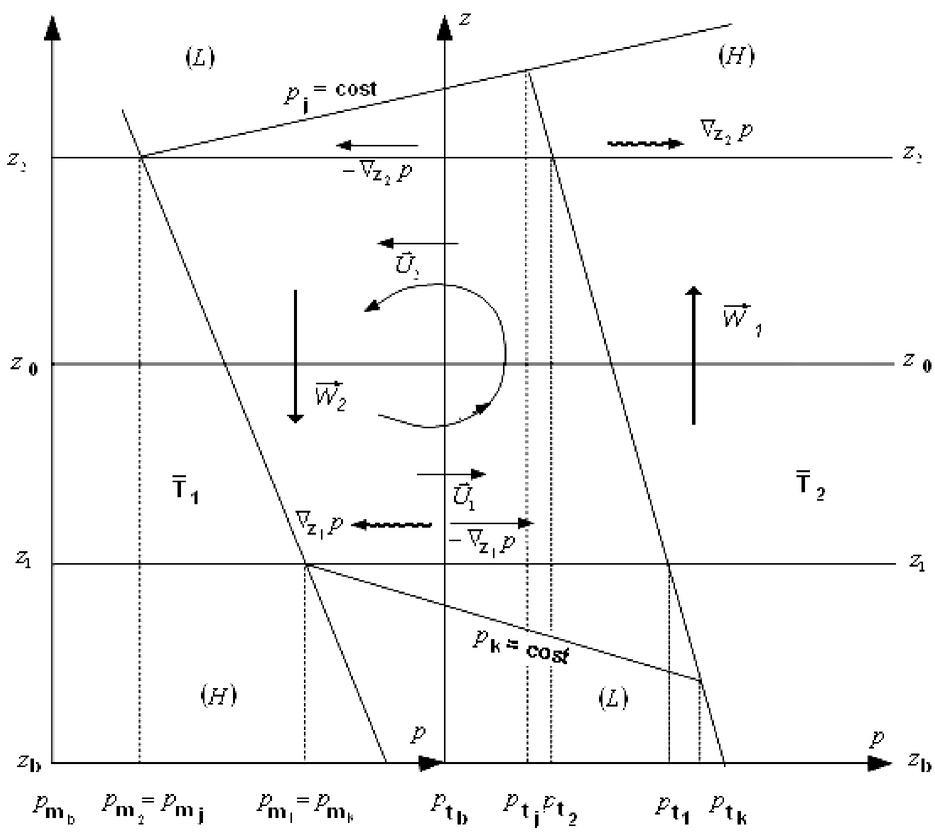
Le due figure rappresentano, come detto, due andamenti di *p* nelle immediate vicinanze del livello *z*, andamenti caratterizzati da due diverse pendenze attribuibili a due diversi valori della densità ρ. A puro titolo indicativo, le linee tratteggiate rappresentano i prolungamenti del segmento infinitesimo (a tratto pieno) che rappresenta la variazione di *p* al livello *z*, nell'ipotesi che la densità non vari con la quota (ipotesi peraltro non verificata nella realtà, come vedremo più avanti – [Equazione (3.33)].

La successiva figura (3.6a) si riferisce a un caso di Brezza di Mare, circolazione chiusa che si sviluppa nelle regioni costiere durante le ore diurne, quando l'aria sulla terraferma è più calda dell'aria di mare.

Schematizzando al massimo la situazione (ossia supponendo T_1 e T_2 costanti in tutto lo strato verticale entro il quale si sviluppa la brezza, con $\overline{T}_1 < \overline{T}_2$ e ipotizzando, per semplicità, l'esistenza di una superficie isobarica p_0 orizzontale, ossia parallela ai piani z = *cost*, a una quota intermedia z_0, possiamo dire che, sulla superficie p_0= *cost.*, vale anche la disuguaglianza $\rho_2 < \rho_1$ (secondo la legge dei gas, essendo $\overline{T}_1 < \overline{T}_2$, come abbiamo appena visto).

Ciò produce variazioni verticali di p più marcate sul mare che sulla terraferma e, quindi, gradienti barici orizzontali opposti alla superficie terrestre e alla sommità della brezza.

Le frecce orizzontali sopra e sotto la circonferenza al centro della figura (3.6a) indicano il verso di moto dell'aria in basso e in quota.



$\vec{T}_2 > \vec{T}_1$

Fig. (3.6a) *Brezza diurna o di mare.*

Nella fig. (3.6a) gli indici *m* e *t* delle pressioni riportate sull'asse delle ascisse si riferiscono rispettivamente al mare e alla terra. Valgono le sottoriportate proprietà di uguaglianza e disuguaglianza:

$$p_{t_j} = p_{m_j}$$
$$p_{t_k} > p_{m_k}$$
$$p_{t_2} > p_{m_2}$$
$$p_{t_1} < p_{m_1}$$

Le frecce verticali indicano invece i moti compensativi dell'aria connessi agli spostamenti orizzontali in basso e in quota (condizione di continuità, o di conservazione della massa).

Pertanto:

$$\left| \left(\frac{dp}{dz} \right)_1 \right| > \left| \left(\frac{dp}{dz} \right)_2 \right|$$

ossia:

$$(p_b)_1 < (p_b)_2 \quad \text{e} \quad (p_a)_1 > (p_a)_2$$

Abbiamo già visto, al Paragrafo 3.2, e ancora vedremo, nel Capitolo della Dinamica, che l'accelerazione impressa da un gradiente orizzontale di pressione $\nabla_H p$ è data da $\vec{a}_{\nabla_H p} = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p$, dove $\nabla_H p = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} \right)_{z=\cos t}$, per cui la velocità $\vec{U}$ ai due livelli (superiore e inferiore), anch'essa proporzionale in modulo e direzione a $-\nabla_H p$, ha verso opposto, dando così luogo a una circolazione antioraria.

Questo tipo di atmosfera è detto "atmosfera baroclina" e permette il mantenimento, nel campo conservativo gravitazionale della Terra, di correnti atmosferiche chiuse (celle di brezza, celle di Hadley, ecc.), generate da forze "aeromotrici" non conservative che creano, nel campo conservativo gravitazionale della Terra, moti circolatori chiusi dell'aria.

In altre parole, si puo' anche dire - in analogia con la definizione di forza elettromotrice dell'elettromagnetismo - che la particolare distribuzione "orizzontale" della temperatura atmosferica esistente in queste condizioni consente di estrarre energia dal campo di "galleggiamento" idrostatico, o Archimedeo, alimentato dal Sole, espresso dal nuovo campo vettoriale non conservativo, campo cosiddetto della "gravità ridotta" [$g' = g\,(T-T_e)/T_e$] il cui significato verrà chiarito nel Capitolo della Termodinamica e che equivale ad una *forza fluidomotrice* per unità di massa in grado di generare correnti fluide chiuse.

3.5 - Equazione di stato dei gas (richiami).

Lo stato di un gas in quiete è definito da 3 quantità, espresse nella forma cosiddetta intensiva, ossia normalizzata rispetto alla massa: *temperatura, pressione e densità* (o volume specifico). Questa quantità sono interdipendenti e soddisfano sempre una relazione nota come equazione di stato del gas.

Ricordiamo alcune nozioni fondamentali su tale equazione.

Combinando fra loro la legge di Boyle:

$$(pV)_{T=\cos t} = (p'V')_{T=\cos t} = \cos t$$

e quella di Gay-Lussac:

$$V_{p=\cos t} = V_o\left(1+\alpha_p t\right)_{p=\cos t}$$

dove V rappresenta il volume (arbitrario) occupato dal gas, V_o il suo valore a $t = 0\ ^oC = 273,16\ K$, α_p il coefficiente di dilatazione volumica (dato da $\frac{1}{273,16}\ {}^0C^{-1}$) e t la temperatura in gradi centigradi, otteniamo:

$$pV = p'V' = p'V_0'\left(1+\alpha_p t\right) = p'V_0'\alpha_p\left(\frac{1}{\alpha_p}+t\right)$$

Posto ora : $C = p'V_0'\alpha_p$ e $T = \frac{1}{\alpha_p}+t = 273+t$

si ottiene la legge dei gas riferita al generico volume V:

$$pV = CT \qquad [a]$$

Detto n il numero di kilomoli contenute nel volume V a $t = 0\ ^oC = 273,16\ K$ e a 1 atmosfera, il rapporto $v = \frac{V}{n}$ = $22,414\ \left[m^3 kmole^{-1}\right]$ definisce il volume molare, ovvero il volume occupato da 1 kilomole di gas alle condizioni di pressione e temperatura sopra riportate.

Dividendo ambo i membri della [a] per n e ponendo[3] $\frac{C}{n} = R^* = 8.3143 \bullet 10^3\ J\ K^{-1} kmole^{-1}$ (costante universale dei gas), si ottiene l'equazione di stato per 1 kilomole:

$$pv = R^*T \qquad [ß]$$

dalla quale si ricava la classica e ben nota legge dei gas della Fisica Sperimentale:

---

[3] C è costante per il particolare processo che si considera, ma è direttamente proporzionale al numero di kilomoli presenti. Invece $\frac{C}{n} = \frac{p_s V_{0_s}\alpha_p}{n} = R^* \ --> \cos t\ \ universale$

$$pV = nR^*T \qquad [\gamma]$$

Dividendo invece la [ß] per N = 6.0248 10^{26} (molecole $kmole^{-1}$ = numero di Avogadro), si ha la legge dei gas riferita a una molecola:

$$p\frac{v}{N} = \frac{R^*}{N}T = KT$$

con K = 1.3806 10^{-23}J $K^{-1}$$molecola^{-1}$ (costante di Boltzman).

Partendo ora dalla sopra ricordata equazione di stato dei gas (pV = nR^*T), cerchiamo di ottenere un'espressione della legge dei gas che sia di più agevole uso e meglio utilizzabile in atmosfera (che non è compartimentabile) di quanto non sia quella sopra riportata come equazione **[γ]**.
Per ottenerla, dobbiamo trasformare, per le ragioni ricordate in precedenza, l'equazione di stato in modo che in essa compaiano solo grandezze continue, definibili in ogni punto dello spazio, ossia campi continui e derivabili delle grandezze fisiche.
Detta *m* la massa (in kg) del gas contenuto in un volume *V* a (T, p), abbiamo visto che il numero *n* di kilomoli (kmoli) è dato sia da:

$$n = \frac{V}{v}$$

dove *v* è il volume molare, sia anche da:

$$n = \frac{\rho V}{\rho v} = \frac{m}{\mu} \qquad \mu \equiv \left(kg\ kmole^{-1}\right)$$

dove μ è la massa di 1 *kmole* espressa in kg (nota anche come “peso” molecolare espresso in *kg/(kmole)*.

Quindi, la legge dei gas può assumere la nuova forma:

$$pV = nR^*T = \frac{m}{\mu}R^*T$$

e, dividendo per *m*.

$$p\frac{V}{m} = \frac{R^*}{\mu}T$$

Ponendo infine:

$$\frac{V}{m} = \alpha = \frac{1}{\rho} \qquad \text{[volume specifico (m}^3\text{ kg}^{-1}\text{)]}$$

si introduce la nuova grandezza a, detta ***volume specifico*** [uguale all’inverso della densità ρ, le cui unità di misura sono ($m^3 kg^{-1}$)] e la nuova costante $R = \frac{R^*}{\mu}$, che prende il nome di ***costante specifica dei gas:***

$$\left[\frac{JK^{-1}\ kmole^{-1}}{kg\ kmole^{-1}} = J\,kg^{-1}K^{-1}\right].$$

Con queste modifiche la legge cercata diviene:

$$p\alpha = RT \tag{3.8}$$

ovvero anche:

$$\begin{cases} p = \rho RT \\ \dfrac{p}{\rho} = RT \end{cases} \tag{3.9}$$

3.5.1 - Legge dei gas, o di stato, per il miscuglio atmosferico "secco".

L'aria è un miscuglio di ***n*** gas non condensabili alle pressioni e temperature ordinarie sulla Terra [detto anche (impropriamente) miscuglio "secco" o aria "secca"] e di vapore d'acqua. Stabiliamo per prima l'equazione dei gas per il solo miscuglio "secco" (ossia, per un tipo immaginario di atmosfera priva di vapore d'acqua). Siano:

$V(m^3)$	volume occupato dalla massa d'aria "umida" considerata, ossia dal miscuglio formato dai costituenti non condensabili e dal vapore d'acqua.
$m_i\ (kg)$	massa dell'i-esimo componente del miscuglio gassoso "secco" nel volume V, o massa relativa dell'i-esimo gas non condensabile
$m_v\ (kg)$	massa del vapore d'acqua nel volume V, o massa relativa del vapore d'acqua
$m_d\ (kg) = \sum_1^n {}_i\, m_i$	massa del miscuglio secco nel volume V di aria "umida" alla pressione p e alla temperatura T
$m_a\ (kg) = m_d + m_v$	massa d'aria "umida" nel volume V
$\frac{V}{m_i} = \alpha_i \left(\frac{m^3}{kg} \right)$	volume specifico dell'i-esimo componente

$\frac{V}{m_d} = \alpha_d \left(\frac{m^3}{kg} \right)$ volume specifico dell'aria "secca"

$\frac{m_d}{V} = \rho_d \left(kg\, m^{-3} \right)$ densità dell'aria "secca"

$\frac{m_v}{V} = u.\, a. \left(kg\ m^{-3} \right)$ densità del vapore d'acqua, o umidita' assoluta (U.A.)

$\frac{m_v}{m_d} = M.\, R. \left(kg\ kg^{-1} \right)$ Mixing Ratio (kg di vapore d'acqua in un kg di aria "secca "

$M_i = \frac{m_i}{m_d} = r_i \left(\frac{kg}{kg} \right) << 1$ rapporto di mescolamento (mixing ratio) dell'i-esimo gas, o massa (in kg) del gas della specie "i-esima" contenuta in un kg di aria "secca". **Notare la condizione $M_i << 1$**

Valgono infine le seguenti ovvie relazioni: $m_i = M_i\, m_d$ e $m_d = \frac{m_i}{M_i}$

Stabiliamo subito una importante relazione fra α_d e α_i.

Poiché, come abbiamo visto:

$m_i = M_i m_d \rightarrow M_i = \frac{m_i}{m_d}$ (da cui la relazione sopra riportata: $m_d = \frac{m_i}{M_i}$)

si ha: $\alpha_i = \frac{V}{m_i} = \frac{V}{M_i m_d} = \frac{\alpha_d}{M_i}$,

ossia: $\alpha_i = \frac{1}{\rho_i} = \frac{\alpha_d}{M_i}$

Per via della relazione che lega a a ρ, si avrà:

$$\begin{cases} \alpha_i = \dfrac{1}{\rho_i} = \dfrac{\alpha_d}{M_i} & \left(m^3 kg^{-1}\right) \\ \rho_i = \dfrac{1}{\alpha_i} = \dfrac{M_i}{\alpha_d} & \left(kg\, m^{-3}\right) \end{cases}$$

ossia anche:

$$\alpha_d = \alpha_i M_i = \frac{M_i}{\rho_i}$$

Infatti:

$$\alpha_i M_i = \left(\frac{V}{m_i}\right)\left(\frac{m_i}{m_d}\right) = \frac{V}{m_d} = \alpha_d$$

Valgono inoltre le ovvie proprietà:

[A] $$\rho_d = \frac{m_d}{V} = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{V} = \frac{m_1}{V} + \cdots + \frac{m_n}{V} = \rho_1 + \cdots + \rho_n$$

ossia: $$\rho_d = \sum_1^n {}_i\, \rho_i$$

[B] $$\alpha_d = \frac{V}{m_d} = \frac{V}{m_1 + \cdots + m_n} \neq \frac{V}{m_1} + \cdots + \frac{V}{m_n} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \sum_1^n {}_i\, \alpha_i$$

ossia:

$$\alpha_d \neq \sum_1^N {}_i\, \alpha_i \qquad \alpha_d = \alpha_i M_i = \alpha_i \frac{m_i}{m_d} = \frac{\alpha_i m_i}{m_1 + \cdots + m_n}$$

a cui si aggiungono le seguenti disuguaglianze (come e' ragionevole attendersi):

[B-1] $\alpha_i > \alpha_d$ e $\rho_i < \rho_d$

Si può quindi scrivere una legge dei gas per l'i-esimo componente:

[C] $$p_i \alpha_i = R_i T$$

nella forma:

[D] $$p_i \frac{\alpha_d}{M_i} = R_i T$$

Questo passaggio toglie la difficoltà, evidenziata dalla disuguaglianza [B], di sommare sulle α_i, nel primo membro della [C], per ottenere un'equazione dei gas per il miscuglio "secco".

La precedente relazione può infatti essere scritta, grazie alla [D], come:

$$p_i \alpha_d = M_i R_i T$$

Sommando ora su tutti gli n componenti, si ottiene:

$$\alpha_d \sum_1^n {}_i\, p_i = T \sum_1^n {}_i\, M_i R_i$$

Questa suddivisione ci permette di utilizzare la legge di Dalton:

$\sum_1^n {}_i\, p_i = p_d$ (pressione totale del miscuglio "secco")

Ponendo, inoltre:

$$R_d = \sum_1^n {}_i\, M_i R_i$$

si ottiene una grandezza che rappresenta la costante specifica dei gas per l'aria secca, intesa come una ***media pesata*** delle R_i (i pesi statistici sono le masse relative M_i).

Si ha così infine la legge dei gas per aria "secca"

$$p_d \alpha_d = R_d T \qquad (3.10)$$

Poiché $\mu_d = 28.9\left(kg kmole^{-1}\right)$, si assume per R_d (media delle costanti specifiche R_i dei gas pesata sulle “presenze” relative dei singoli componenti gassosi non condensabili) l’espressione:

$$R_d = \frac{R^*}{\mu_d} = \frac{8.3143 \cdot 10^3 \left(JK^{-1}\right) kmole^{-1}}{28.9\left(kg\, kmole^{-1}\right)} = 287\left(Jkg^{-1}K^{-1}\right) =$$

$$= 0.0686 \; Cal \; kg^{-1}K^{-1} = 68.6\, cal \; kg^{-1}K^{-1}$$

3.6 - Legge dei gas per l’aria.

Con il termine ***aria*** si intende, come si è già detto, l’aria reale, contenente anche il componente condensabile vapor d’acqua. Si ammette che, pure per quest’ultimo, valga l’approssimazione di gas perfetto (la temperatura critica T_c dell’acqua vale infatti $647 \; K$). D’ora innanzi, quindi, l’aria “umida” sara’ chiamata semplicemente ***aria.***

Detta e la pressione parziale del vapor d’acqua nel miscuglio, la <u>legge di stato dei gas per il vapor d’acqua</u> assume la seguente espressione:

$$e\alpha_v = R_v T \quad \textit{equivalente a}: \quad e = \rho_v \; R_v \; T$$

con $R_v = \frac{R^*}{\mu_v} = 461$ (J kg^{-1} K^{-1}), essendo $\mu_v = 18\left[kg\left(kmole\right)^{-1}\right]$

$\alpha_v = \frac{1}{\rho_v} \Rightarrow$ volume specifico del vapor d’acqua (m^3/kg)

$\rho_v \Rightarrow$ densità del vapor d’acqua (umidità assoluta) (kg/m^3)

R_v rappresenta la costante dei gas specifica per il vapore d’acqua.

Introduciamo ora le due nuove masse specifiche (M_d e M_v) caratteristiche dell'aria - vista quest'ultima come miscuglio di gas "secchi" e vapore – e definite come:

$M_d = (1-s)\ \left(kgkg^{-1}\right)$ chilogrammi di frazione "secca" per kg di aria

$M_v = s\ \left(kgkg^{-1}\right)$ chilogrammi di vapore per kg di aria.

avendo indicato con:

$s = \dfrac{m_v}{m_a} = \dfrac{m_v}{m_d + m_v}$ l'umidità specifica o massa frazionale del vapore (kg di vapore in 1 kg di aria)

e con:

$1 - s = \dfrac{m_d}{m_a}$ la massa frazionale dell'aria "secca" (kg di aria "secca" in un kg di aria)

per cui: $s + (1-s) = 1\ \left[\left(kgkg^{-1}\right)\right]$ o, anche, chilogrammi di aria in 1 kg di aria.

Per le relazioni viste all'inizio del paragrafo 3.5.1 [ossia $M_i = \dfrac{m_i}{m_d}$ e $m_d = \dfrac{m_i}{M_i}$, dove M_i rappresenta un "mixing ratio" come s e come M_d e M_v che sono stati definiti all'inizio di questo paragrafo], si può scrivere che:

$$\alpha_v = \frac{\alpha}{s} \quad \text{e} \quad \alpha_d = \frac{\alpha}{1-s} \tag{3.10a}$$

ovvero: $\rho_v = \dfrac{1}{\alpha_v} = \dfrac{s}{\alpha} = \rho_a\ s$; $\rho_d = \dfrac{1}{\alpha_d} = \dfrac{1-s}{\alpha} = \rho_a\ (1-s)$

con:

$\alpha \rightarrow$volume specifico dell'aria $\left(\equiv \frac{1}{\rho_a}\right)$

$\alpha_{v,d} \rightarrow$ volume specifico del vapore, dell'aria "secca" $\left(\equiv \frac{1}{\rho_v}, \frac{1}{\rho_d}\right)$

Essendo *s* << *1-s*, risultera' che $\alpha_v >> \alpha_d$, ossia $\rho_v << \rho_d$

3.6a - Temperature convenzionali: la temperatura virtuale T_v.

Detta $p = p_d + e$ la pressione totale del miscuglio atmosferico, per cui:

$$p_d = p - e$$

le equazioni di stato per l'aria "secca" e per il vapor d'acqua si possono scrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} (p-e)\alpha_d = R_d T \\ e\alpha_v \quad = R_v T \end{cases}$$

ovvero, per la (3.10.a):

$$\begin{cases} (p-e)\alpha = (1-s) R_d T \\ e\alpha \quad = sR_v T \end{cases} \tag{3.10b}$$

Essendo $\frac{R_v}{R_d} = \frac{\mu_d}{\mu_v} = \frac{28{,}97}{18{,}02} = 1{,}608$, da cui $R_v = 1{,}608 R_d$, si ha:

$$\begin{cases} (p-e)\alpha = R_d (1-s) T \\ e\alpha \quad = R_d s 1{,}608 T \end{cases} \tag{3.10c}$$

Sommando le due equazioni (3.10c) si ottiene:

$$p\alpha = R_d \left(1 + 0.608 s\right) T \begin{cases} = R_d \, T_v \\ = R_a \, T \end{cases} \tag{3.11}$$

dove: $T_v = T(1+0.608s)$ $\rightarrow$ temperatura virtuale (3.11a)

$R_a = R_d(1+0.608s) \rightarrow$ costante dei gas specifica per l'aria (3.11b)

La (3.11) esprime il fatto che l'equazione di stato per l'aria può assumere due forme, a seconda della grandezza fisica (T oppure R_d) a cui si associa il termine (1 + 0.608s).
Essendo s= 0, vale l'ovvia proprietà:

$$T_v \geq T, \quad R_a \geq R_d \tag{3.11c}$$

<u>Significato fisico di T_v</u>: è la temperatura a cui portare, a $p = cost$ (e uguale a quella dell'aria considerata), un volume *V* di aria "secca" per farle assumere la stessa densità dell'aria considerata.
Infatti, se sostituiamo le densità $\rho_d = \frac{1}{\alpha_d}$ e $\rho = \frac{1}{\alpha}$ dell'aria "secca" e dell'aria "umida" al posto dei rispettivi volumi specifici nella (3.10) e nella (3.11), si ottiene la coppia di equazioni, rispettivamente $p_d = R_d \rho_d T$ e $p = R_d \rho\, T_v$, che mostrano come, a parità di T e p, la densità dell'aria "umida" sia sempre inferiore a quella dell'aria "secca", perché $T_v = T(1+0,608s > T$, essendo s > 0 nell'aria umida.

Si ha quindi:

$\rho_v < \rho_d$ $\alpha_v > \alpha_d$	$\mu_v < \mu_d$ $(18.02) < (28.97)$

Definendo: $$T_v = T(1 + 0{,}608s) = T + 0{,}608sT = T + \Delta T_v$$

si ha: $$\Delta T_v = T_v - T$$

Inoltre: $$\Delta T_v = 0.608\, sT$$

per cui: $$T_v = T + 0{,}608sT = T + \Delta T_v$$

3.6b - Espressione approssimata per ΔT_V.

Se dividiamo fra di loro le espressioni delle due equazioni di stato (3.10c) ottenute nel paragrafo 3.6a (separatamente per il miscuglio “secco” e per il vapore d’acqua), otteniamo:

$$\frac{p-e}{e} = \frac{1-s}{1{,}608\,s} = \frac{1}{1{,}608\,s} - \frac{1}{1{,}608}$$

Effettuiamo ora i seguenti ulteriori passaggi. Dapprima risolviamo l’equazione rispetto a $\frac{1}{1{,}608s}$:

$$\frac{1}{1{,}608\,s} = \frac{p-e}{e} + \frac{1}{1{,}608} = \frac{1{,}608(p-e)+e}{1{,}608\,e}$$

Ricaviamo quindi l’espressione per $\frac{1}{s}$, moltiplicando ciascuno dei tre membri dell’ultima duplice eguaglianza per 1,608:

$$\frac{1}{s} = \frac{1{,}608\,p - 0{,}608e}{e}$$

e, infine, quella per *s* in funzione di *e* e *p*:

$$s = \frac{e}{1{,}608\,p - 0.608e} = \frac{\frac{e}{1{,}608}}{p - \frac{0{,}608}{1{,}608}e} = \frac{0{,}622\,e}{p - 0{,}378\,e}$$

La relazione fra *s*, la pressione parziale del vapore (*e*) e la pressione totale dell'aria può quindi essere approssimata come segue: $s \cong 0{,}622\frac{e}{p}\left(\frac{kg}{kg}\right)$ essendo $e << p$.

Quindi:

$$0{,}608\ sT \quad = \quad \Delta T_v = (0{,}608)\left(0{,}622\frac{e}{p}\right)T \cong\ 0{,}378T\frac{e}{p}, \qquad (3.12)$$

ΔT_V è massima quando $s \to s_m$ (fissati *T* e *p*) e quando T è elevata (fissati s_m e *p*).

Fissato *p* al valore standard di $1{,}013 \cdot 10^5\,Pa$, si ha:

$$\Delta T_{v_m} = \left\langle \begin{array}{lll} \to \cong 10^{-2}\ {}^oC & per & T = -40^oC \\ \to \cong 9\ {}^oC & per & T = +40\,{}^oC \end{array} \right.$$

Usando la T_v, l'equazione di stato dell'aria [come l'equazione (3.11) ha gia' mostrato] diviene:

$$p\alpha = R_d T_v$$

oppure:

$$p = R_d \rho T_v$$

con: $R_d = 287\left(J\,kg^{-1}K^{-1}\right)$ *ovvero* $\left(m^2 s^{-2} K^{-1}\right)$

Confrontando le espressioni:

$$p_d = R_d \rho_d T \quad \rightarrow \quad \rho_d = \frac{p_d}{R_d T}$$

e:

$$p \quad = R_d \rho T_v \quad \rightarrow \quad \rho = \frac{p}{R_d T_v}$$

vediamo che, a parità di p e T, ρ è sempre minore di ρ_d, essendo $T_v > T$ (il vapore d'acqua, meno denso, sposta parte del miscuglio secco nel volume V, se la pressione $p = p_d$).

3.6b.1 – Il "pressure step dell'atmosfera" (al livello del mare).

Si definisce "pressure step" il gradiente verticale di pressione atmosferica al livello del mare *(z≅0)* in condizioni standard di pressione $(1.013 \cdot 10^5 Pa)$ e temperatura *(273.16 K)* dell'aria.

In tali condizioni, l'equazione di stato fornisce il valore standard di 1.29 kg/m^3 per la densità dell'aria, cosicché l'equazione idrostatica dà, per la grandezza cercata, il seguente valore:

$$\left(\nabla_v p\right)_{z=0} = \left|\frac{dp}{dz}\right|_{z=0} = \left|\rho g\right|_{z=0} = 1.29\left(kg\, m^{-3}\right) 9.81\left(m s^{-2}\right) = 12.5\, kg\, m^{-2} s^{-2} = \qquad [\omega]$$

$$= 12.5\, Nm^{-3} = 12.5 \frac{Pa}{m}$$

In unità pratiche, si ha:

$$\left|\frac{dp}{dz}\right|_{z=0} = 12.5 \frac{hPa}{100m} = 12.5 \frac{mb}{100m} = 0.125 \frac{mb}{m}$$

Vedremo piu' avanti che il "pressure step" permette di definire un' ***altezza di scala*** dell'atmosfera.

3.6c – Energia Potenziale Gravitazionale.

Un punto materiale A di massa *m* viene attratto dalla Terra con la forza peso $\vec{p} = m\vec{g}$ diretta secondo la verticale (e orientata verso il basso). Il suo spostamento $d\vec{s}$ e' verso il basso (e *ds cosθ = -dz*) per *θ < p/2*, mentre e' verso l'alto (e *ds cosθ = +dz*) per *θ > p/2* . Il caso qui considerato illustra nel dettaglio la prima situazione, ossia *ds cosθ = -dz.* Prendiamo un piano orizzontale e un asse z orientato verso l'alto come in figura (3.6b).

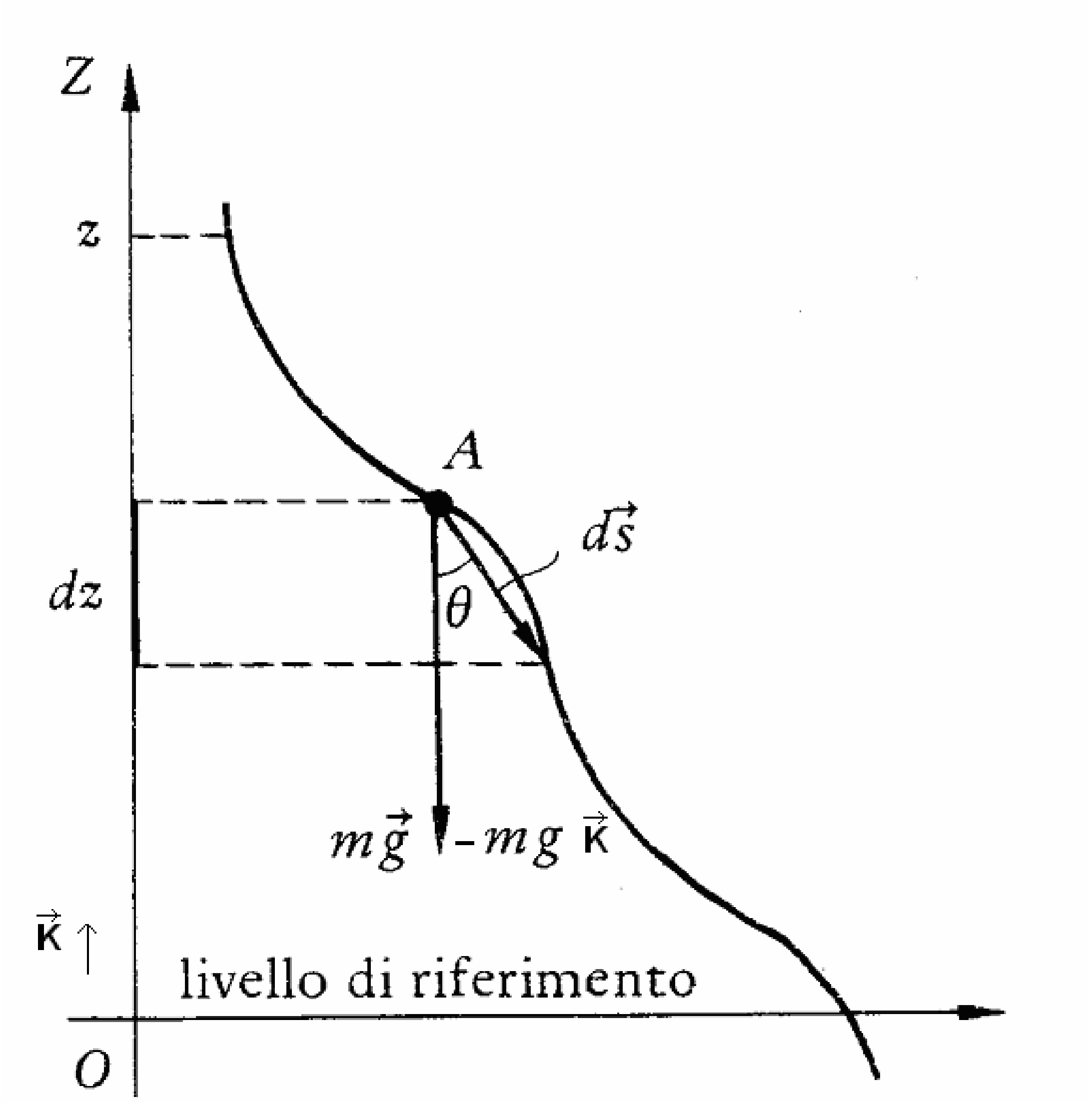


Fig. (3.6b)

La forza peso, per uno spostamento elementare $d\vec{s}$ del punto A, compie un lavoro

$$dL = m\vec{g} \bullet d\vec{s} = mgds\cos\vartheta = -mgdz \qquad (3.12a)$$

dL e' > 0 per $dz < 0$ ed e' < 0 per $dz > 0$

Il segno meno indica che il lavoro elementare e' positivo quando z diminuisce ($dz < 0$). Se il punto materiale passa dalla quota z a quella $z=0$ (ossia sul piano di riferimento), il lavoro compiuto dalla forza di gravita' e':

$$L = \int_z^0 (-mg)\, dz = mgz \qquad (3.12b)$$

Si vede cosi' che, nel lavoro della forza di gravita', al contrario di quanto accade in generale, non compare la traiettoria percorsa dal punto. Questo lavoro dipende ***solo*** dalla ***posizione*** (quota z) ***iniziale*** e da quella ***finale*** e non dal percorso seguito o dalla legge del moto del punto materiale.
Un corpo pesante ha pertanto la capacita' di compiere un lavoro dato dalla (3.12b), quando passa dalla generica quota z alla quota zero. Cioe' il corpo pesante all'altezza z sopra il piano di riferimento possiede un'***energia di posizione rispetto al piano stesso*** data da:

$$V_{gr} = mgz, \qquad (3.12c)$$

che e' chiamata ***energia potenziale di gravià (o gravitazionale).***
Queste considerazioni mostrano anche che l'energia può essere considerata un ***contenuto di lavoro.***
Se il punto pesante passa dalla posizione iniziale z_1 a quella finale z_2, il lavoro compiuto dalla forza di gravità é :

$$[L]_{1\rightarrow 2} = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = \int_{z_2}^{z_1} mgdz = mgz_1 - mgz_2 = V_{gr_1} - V_{gr_2} \qquad (3.12d)$$

avendo supposto g costante rispetto a z.

Quindi, se *innalziamo* un punto materiale da una quota z_1 ad una quota z_2 , la forza di gravita’ compie un *lavoro negativo* (e’ invece la forza che dobbiamo applicare al corpo per innalzarlo, e che ha un verso opposto alla forza peso, a compiere un lavoro positivo). Se invece *abbassiamo* il corpo da z_2 a z_1, e’ la forza di gravita’ a compiere un *lavoro positivo*, con il che viene recuperato il lavoro prima speso nell’innalzamento.

Osserviamo che:

a) l’energia potenziale gravitazionale V_{gr} dipende dal sistema di riferimento scelto perche’ z ne dipende:

b) Il valore z_0 di z che corrisponde a $V = 0$, *ossia* $z_0 = -\frac{V_0}{mg}$, definisce una superficie detta superficie di origine dell’energia potenziale.

Infatti:

$$V_{gr} = mgz + \cos t \quad \Rightarrow \quad V_{gr} = mgz_0 + mg\frac{V_0}{mg} = 0$$

da cui:

$$z_0 = -\frac{V_0}{mg}.$$

z_0 rappresenta pertanto la superficie di origine delle energie potenziali (superficie piana orizzontale, nell’ipotesi che $g = cost$ rispetto a z)

3.6d – Forze conservative (il Potenziale e la sua definizione).

Definiamo ***conservative*** quelle forze che sono funzione ***solo*** delle coordinate (ossia sono forze posizionali) e sono caratterizzate dal fatto che il lavoro da esse eseguito spostando il punto di applicazione da una posizione P_1 ad un'altra P_2 e' ***indipendente dalla traiettoria percorsa, ossia dipende soltanto dagli estremi P_1 e P_2.***

In base a questa proprieta' fisica cerchiamo delle relazioni analitiche che permettano di decidere se una forza $\vec{F}(x, y, z)$ e' o non e' conservativa.

Se il lavoro eseguito dalla forza in uno spostamento dipende solo da P_1 e P_2, l'integrale:

$$[L]_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right) \qquad (3.12e)$$

deve dipendere solo da P_1 e P_2. Questo significa che $\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$ e' il ***differenziale esatto dU*** di una funzione U(x,y,z) ; in questo caso infatti possiamo scrivere:

$$[L]_{1\to 2} = \int_{P_1}^{P_2} dU = U(P_2) - U(P_1) \qquad (3.12f)$$

cioe' ∂ L dipende proprio solo dai valori assunti dalla funzione U nei punti P_1 e P_2: in altre parole, dipende solo dagli estremi della traiettoria seguita. L'analisi insegna che se $\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz \right)$ e' il differenziale dU di una funzione U(x,y,z) , deve anche essere:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_{yx} = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Perche' queste relazioni siano verificate, sappiamo dall'Analisi Matematica che, per il teorema di Schwarz, devono valere anche le seguenti altre relazioni :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad (3.12g)$$

La funzione scalare U(x,y,z) si chiama ***potenziale della forza*** $\vec{F}$ nel generico punto P (x,y,z). Le (3.12g) rappresentano la ***condizione, necessaria e sufficiente, perche' il campo della forza*** $\vec{F}$ ***sia conservativo.***

Si vede cosi' che il lavoro compiuto da una forza conservativa e' dato dalla differenza tra le energie potenziali nei punti P_1 e P_2 allorche' il punto di applicazione della forza si sposti dal primo al secondo. Con riferimento alle equazioni (3.12d) e (3.12f), vediamo d'altra parte che lo stesso lavoro tra i punti P_1 e P_2 e' dato da :

$$[L]_{1\to 2} = V_1 - V_2 = U_2 - U_1,$$

stabilendo la seguente relazione fra energia potenziale gravitazionale e potenziale:

$$\Delta V(x,y,z) = -\,\Delta U(x,y,z),$$

talora indicata, ***impropriamente***, come $V(x,y,z) = -U(x,y,z)$.

per cui un punto che sia soggetto ad una forza conservativa ha un'energia potenziale $V(x,y,z)$ la cui espressione analitica e' data dalla funzione potenziale $U(x,y,z)$ cambiata di segno.

Spesso si introduce la funzione **u = U**/m = -mgz/m = -gz.

Questa nuova funzione **u** si chiama ***potenziale del campo di gravita'*** e si puo' interpretare come la funzione potenziale relativa a un corpo di massa unitaria.

La caratteristica fisica fondamentale delle forze conservative (e cioe' che il lavoro da esse compiuto e' indipendente dalla traiettoria) permette di dedurre che, quando detta traiettoria e' chiusa, questo lavoro e' nullo in quanto il punto iniziale P_1 coincide col il punto finale P_2, per cui **u** (P_2) = **u** (P_1), il che significa $[L]_{1\to 2} = 0$.

3.7 - Il **Geopotenziale.**

Il concetto di ***geopotenziale*** e' strettamente connesso a quello dell'energia potenziale gravitazionale, definita e discussa nel precedente paragrafo 3.6c.

Per definire il geopotenziale, partiamo dalla considerazione del lavoro compiuto dalla forza di gravità sull' unità di massa $\left(\vec{g} = -g\vec{k}\right)$, ossia dal lavoro necessario per spostare 1 kg di aria da un livello z_1 a un altro z_2; tale lavoro è:

$$[L]_1^2 = \int_{z_1}^{z_2} -g\vec{k} \cdot dz\vec{k} = \int_{z_1}^{z_2} -g\,dz = -gz_2 - (-gz_1) = gz_1 - gz_2 = V_1 - V_2 \quad [4] \qquad (3.13)$$

dove $V_{1,2}$ indica l'energia potenziale (o il ***geopotenziale***) per unità di massa ai livelli z_1 e z_2 rispettivamente [$V_1 = gz_1$ e $V_2 = gz_2$]. Valgono pertanto le relazioni:

$\dfrac{dV}{dz} = +\,g$	$\dfrac{dV}{dz}\vec{k} = -\,\vec{g} = g\vec{k}$

da cui si ha:

$$dV = gdz \qquad (3.13a)$$

V(z) è il lavoro fatto da $\vec{g}$ per uno spostamento di *1 kg* di aria dal livello *z* al livello del mare, ovvero l'energia di posizione di *1kg* di aria al livello *z*.

---

[4] $\vec{g}$ è sempre rivolto verso il basso e quindi vale $-g\vec{k}$; $dz\vec{k}$ può essere rivolto sia verso l'alto sia verso il basso, e il suo segno è dato dal segno di *dz;* $\dfrac{dV}{dz}\vec{k}$ e' sempre orientato verso l'alto perche' $\dfrac{dV}{dz}$ e' sempre >0 [dV e' >0 se dz e' >0 ed e' <0 se dz e' <0]

Prendiamo, come prima, un piano orizzontale e un asse z orientato verso l'alto. Il lavoro elementare compiuto da $\vec{g} = -g\vec{k}$ su *1 kg* di aria per uno spostamento $d\vec{z} = dz\vec{k}$ (spostamento positivo e verso l'alto se *dz>0*, negativo e verso il basso se *dz<0*), vale:

$$dL = \vec{g} \cdot d\vec{z} = -g\vec{k} \cdot dz\vec{k} = -g\,dz \left\langle \begin{array}{l} > 0 \; se\, dz < 0 \\ < 0 \; se\, dz > 0 \end{array} \right. \tag{3.14}$$

Questo spiega i segni dell'equazione (3.13). Più in generale, indicando con P_1 e P_2 i punti dello spazio fra cui viene fatto il lavoro e ricordando che nel campo gravitazionale il lavoro non dipende dalla traiettoria percorsa ma solo dalle posizioni di partenza e di arrivo [fig. (3.6b)], si può scrivere:

$$[L]_1^2 = \int_{p_1}^{p_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{p_1}^{p_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz \tag{3.15}$$

Ponendo:

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = d\Phi(x, y, z) \tag{3.16}$$

ossia:

$$F_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \; F_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \; F_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}; \tag{3.17}$$

si ha:

$$\vec{F} = \nabla\Phi \quad (= -\nabla V) \tag{3.18}$$

ovvero:

$$\vec{F}_x i + \vec{F}_y j + \vec{F}_z k = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} i\vec{k}$$

Ma:

$$\frac{d\Phi}{dz}\vec{k} = \vec{g} = -g\vec{k} \quad \Rightarrow \quad d\Phi = -gdz$$

per cui:

$$\vec{g} = \frac{d\Phi}{dz}\vec{k} \rightarrow \quad -g\vec{k} = \frac{d\Phi}{dz}\vec{k} \rightarrow \quad g = -\frac{d\Phi}{dz}$$

e quindi:

$$\Phi = -gz$$

essendo: $gz = V \quad e \quad \Delta V = -\Delta\Phi$

Infine:

$$[L]_1^2 = \int_{P_1}^{P_2} d\Phi = \Phi(P_2) - \Phi(P_1) \qquad (3.19)$$

dove:

$$\boxed{\Phi \equiv Potenziale\ di\ \vec{F}}$$

Richiamando la (3.13), abbiamo infine (come visto precedentemente):

$$[L]_1^2 = V_1 - V_2 = \Phi_2 - \Phi_1$$

Ricordiamo quindi, ancora una volta che, se usiamo l'energia potenziale di gravita' V, l'espressione 3.19 del lavoro compiuto per passare dal punto P_1 al punto P_2 e' data dalla (3.13) e dalla sottoriportata (3.20a) che, con le successive (3.20b) e (3.21), stabilisce la gia' vista relazione di segno fra l'energia potenziale e il potenziale sulla Terra.

Caso terrestre (V = geopotenziale):

$$\vec{F} = -g\vec{k}$$

$$[L]_1^2 = [L]_{z_1}^{z_2} = \int_{z_1}^{z_2} -g\vec{k}\cdot dz\vec{k} = \int_{z_1}^{z_2} -g\,dz = gz_1 - gz_2 = -(gz_2 - gz_1) \qquad (3.20a)$$

$$\underbrace{V_1 - V_2}_{\text{energia potenziale per unità di massa}} = \underbrace{-(\Phi_1 - \Phi_2)}_{\text{potenziale}} = \Phi_2 - \Phi_1 \qquad (3.20b)$$

ossia:

$$V_1 - V_2 = -(\Phi_1 - \Phi_2) \Rightarrow V = -\Phi \qquad (3.21)$$

da cui si deriva la relazione di segno $(V = -\Phi)$ fra l'energia potenziale e il potenziale.

In conclusione, il lavoro fatto da $\vec{g}$ per far passare *1 kg* di aria da z_1 a z_2 è dato dalla differenza $V_1 - V_2$ fra le energie potenziali (o i ***geopotenziali***) per unità di massa $V_1=gz_1$ del punto iniziale e $V_2=gz_2$ del punto di arrivo.

Se, invece, si usano i potenziali $\Phi_1 = -gz_1$ e $\Phi_2 = -gz_2$, il lavoro, per la (3.19), è:

$$[L]_1^2 = (\Phi_2 - \Phi_1) = -(V_2 - V_1) = (V_1 - V_2)$$

$$\vec{F} = \nabla V \rightarrow -g\vec{k} = -\frac{dV}{dz}\vec{k} \rightarrow g = \frac{dV}{dz}$$

Si definisce pertanto geopotenziale, e lo si indica con il simbolo **V(z)**, il negativo di $[L]_0^z$, ossia il "negativo" del lavoro fatto "***contro***" le forze del campo $\vec{g}$ per sollevare *1 kg* di aria da *z = 0* a *z*. Come si è già visto nella pagina precedente [equazioni (3.20a) e (3.20b)]:

$$\Phi(z) = -[L]_0^z = -V_0 - (-V) = V - V_0 = V = -0 - (-gz) = gz = \int_0^z g\,dz \qquad (3.22)$$

essendo $V_0 = 0$. Si ha quindi:

$$\vec{g} = -g\vec{k} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} = \nabla\Phi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = -g \quad \text{e} \quad -\frac{dV}{dz}\vec{k} = \vec{g} = -g\vec{k} \rightarrow \frac{dV}{dz} = g$$

$$\Phi(z) = -[L]_0^z = -\Phi_z - (-\Phi_0) = -(-gz) - \; = gz = \int_0^z g\,dz \qquad (3.23)$$

$$\vec{g} = -g\vec{k} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} \qquad \frac{d\Phi}{dz} = -g \qquad (3.23a)$$

Le (3.22) e (3.23) si possono poi anche scrivere:

$$\Phi(z) = \int_0^z g\,dz = V_z - V_0 \qquad \text{e} \qquad \Phi(z) = \int_0^z g\,dz = \Phi_0 - \Phi_z$$

invertendo così il significato di *F* e di *V*, come è logico che sia, vista la definizione di lavoro fatto da un agente esterno contro le forze del campo.

3.8 - Formula barometrica differenziale in coordinate isobariche.

Finora abbiamo definito il lavoro effettuato nel passaggio di un corpo materiale da una quota z_i ad un'altra z_j nel campo gravitazionale terrestre. La legge fondamentale della statica aveva pero' mostrato che esiste una relazione quantitativa fra la quota z e la sua pressione atmosferica. Questa considerazione lascia intuire che esista la possibilita' di usare, al posto della quota z, la pressione atmosferica che ad essa compete. Questa semplice riflessione introduce cosi' la possibilita' di usare la pressione come variabile indipendente e l'altezza come variabile dipendente, passando in tal modo da una rappresentazione in coordinate geometriche ad una nuova rappresentazione in coordinate di pressione (o isobariche).

La ragione principale per la quale conviene passare alle coordinate isobariche e' essenzialmente dovuta al fatto che, in meteorologia (nelle operazioni pratiche), i dati vengono riportati su superfici isobariche. Un 'altra ragione, non certo secondaria, e' [come si vede dall'equazione (3.24)] data dal fatto che, in coordinate isobariche, non compare piu' la densita', che viene sostituita dalla temperatura virtuale T_v. Una terza ragione sara' vista fra poco (equazione 3.27).

Più avanti, verrà affrontato in modo generale il problema del passaggio dalle coordinate geometriche alle coordinate di pressione (isobariche), ossia a quel particolare sistema di coordinate cartesiane ortogonali, la cui coordinata verticale *(z)* è sostituita dalla pressione (*p)*.

Qui ci limitiamo ad anticiparne l'applicazione pratica, risolvendo la formula barometrica in modo che da essa si possa ricavare, con una semplice inversione di variabili, il geopotenziale in funzione della pressione.

Riprendiamo, a questo scopo, la legge dell'idrostatica $\frac{dp}{dz} = -\rho g$, scritta nella forma:

$$-\frac{dp}{\rho} = gdz = dV = -d\Phi$$

ossia:

$$\frac{dp}{\rho} = -gdz = -dV = -+d\Phi$$

ovvero, utilizzando la legge dei gas per esprimere ρ in funzione di p e T_v*:*

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{dp}{\frac{p}{R_d T_v}} = R_d T_v \frac{dp}{p} = -g\,dz = -dV = +d\Phi$$

da cui

$$-\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{\frac{p}{R_d T_v}} = -R_d T_v \frac{dp}{p} = -+g\,dz = -+dV = -d\Phi$$

equivalente a:

$$dV = -R_d T_v d[\ln p]$$

oppure a:

$$d\Phi = R_d T_v d[\ln p]$$

Questa espressione prende il nome di ***formula barometrica differenziale*** risolta per il geopotenziale in funzione della pressione, ossia in coordinate isobariche.

Questa legge differenziale, scritta anche come:

$$\frac{dV}{d[\ln p]} = -R_d T_v \qquad (3.24)$$

esprime il fatto che la variazione di V con la pressione dipende solo da T_v.

Integrandola, si ha la:

Formula barometrica generale in coordinate di geopotenziale/pressione

Infatti, integrando la (3.24) fra i livelli di pressione p_1 e p_2, che si trovano alle quote z_1 e z_2, si ottiene la differenza di geopotenziale ΔV fra p_1 e p_2:

$$V_1 - V_2 = \Phi_2 - \Phi_1 = \Delta\Phi(z) = R_d \int_{p_2}^{p_1} T_v(p)\, d[\ln p] \qquad (3.25)$$

Applicando poi il teorema del valor medio del calcolo integrale, per cui:

$$\overline{T}_v = \frac{\int_{p_2}^{p_1} T_v(p)\, d[\ln p]}{\int_{p_2}^{p_1} d[\ln p]} \qquad (3.26)$$

si ottiene un valore medio della $T_v(p)$ nello strato $p_1 \div p_2$ dipendente non solo dalla legge $T_v(p)$ ma anche dai due livelli (p_1 e p_2).
Utilizzando questo risultato, si ha:

$$V_2 - V_1 = R_d \int_{p_2}^{p_1} T_v(p)\, d[\ln p] = R_d \overline{T}_v \int_{p_2}^{p_1} d[\ln p] = R_d \overline{T}_v \ln \frac{p_1}{p_2} \qquad (3.27)$$

La (3.27) mostra che, in coordinate isobariche, oltre alla densita' ρ non compare neppure più $\vec{g}$ sotto segno di integrale, in quanto l'accelerazione di gravità è ora incorporata nel geopotenziale *V*.
Conviene ora introdurre, in aggiunta all'altezza geometrica *z*, l'altezza di geopotenziale *Z* (in metri di geopotenziale [mgp]):

$$Z = \frac{V(z)}{g_o} = \left(\frac{g}{g_o}\right) z$$

con $g_o = 9{,}80665\, ms^{-2}$, media di $g(0,f,\vartheta)$, ossia su tutta la Terra al livello del mare.

Il valore di Z , numericamente, differisce poco dal valore geometrico z nella troposfera.

Usando *Z*, la formula barometrica in coordinate di pressione diviene:

$\Delta Z \equiv$ Spessore dello strato d'aria fra p_1 e p_2 [in mgp] =

$$\equiv Z_2 - Z_1 = \frac{R_d}{g_o} \int_{p_2}^{p_1} T_v(p) d(\ln p)$$

Ma, dalla (3.26) [e dalla (3.27) divisa per R_d], si ha che:

$$\int_{p_2}^{p_1} T_v(p)\, d(\ln p) = \overline{T}_v \int_{p_2}^{p_1} d(\ln p) = \overline{T}_v \ln \frac{p_1}{p_2}$$

per cui:

$$\Delta Z = \frac{R_d \overline{T}_v}{g_o} \ln \frac{p_1}{p_2} = H \ln \frac{p_1}{p_2}$$

con:

$$H = \frac{R_d \overline{T}_v}{g_o} = \frac{R_d}{g_o} \left[\frac{\int_{p_2}^{p_1} \overline{T}_v(p) d(\ln p)}{\int_{p_2}^{p_1} d(\ln p)} \right]$$

e con $\overline{T}_V \equiv$ valore medio di $T_V(p)$ fra p_2 e p_1.

H prende il nome di altezza di scala dell'atmosfera in coordinate di geopotenziale/pressione, ed è definita nello strato $p_1 \div p_2$.

3.9 - Formule barometriche e "altezze di scala" dell'atmosfera.

In questo paragrafo consideriamo alcune tipologie "ideali" di atmosfera che consentono di definire - attraverso le grandezze fisiche fondamentali della fluidodinamica, che caratterizzano le proprieta' statiche dell'aria - altezze di scala utili a "scalare" i profili verticali delle atmosfere reali.

Dall'equazione della Statica al livello del mare, $\left(-\frac{dp}{dz}\right)_{z=0} = \rho_o\, g$, abbiamo visto precedentemente (paragrafo 3.6.b1) che era possibile, partendo dal cosiddetto "*Pressure Step*", definire un valore standard di 1,29 kg/m^3 per la densita' dell'aria in prossimita' del suolo in condizioni standard di pressione (1,013 • 10^5 Pa) e temperatura (273,16 K) dell'aria. Ricordando il "pressure-step" dell' atmosfera [equazione ω] , otteniamo cosi' una altezza di scala :

$$h = \frac{dz}{-dp} = \frac{1}{\rho_o\, g}$$

derivante dal già visto "*Pressure Step*" ed espressa in unità di (m Pa^{-1}**).**

Al livello del mare e a zero gradi centigradi, si ha infatti:

$$[h]_{z=0} = \frac{1}{0.125}\,\frac{m}{mb} = 8\,\frac{m}{mb} \qquad \text{(in unità pratiche)}$$

che rappresenta un primo esempio, sia pure elementare, di "scala mista", la quale fornisce la diminuzione standard (ossia a 273,16 K e 1,013 Pa) della pressione al livello del mare.

Riprendiamo ora la $-\frac{dp}{dz} = \rho g$ [5] e integriamola da *0* a *z* e da p_0 a *p*.

[**A**] $$p = p_0 - \int_0^z g\,\rho(z)\,dz$$

---

5 $\int_{p_0}^{p} dp = -\int_0^z \rho\; g\; dz$

Otteniamo in tal modo la cosiddetta “***Formula barometrica nella densità***”.

Sostituiamo:

$$\rho = \frac{p}{R_d T_v}$$

Separando le variabili, otteniamo:

[**B**] $$-\frac{dp}{p} = \frac{g\ dz}{R_d T_v}$$

da cui, con la medesima integrazione di prima, ricaviamo:

$$\ln p = \ln p_0 - \frac{1}{R_d} \int_0^z \frac{g\,dz}{T_v(z)}, \qquad (3.28)$$

ossia la cosiddetta “***Formula barometrica nella temperatura***”.

Le due formule barometriche [**A**] e [**B**] permettono di calcolare la pressione a un livello qualsiasi, purché siano noti, rispettivamente, i profili verticali o di ρ o di T_v. Conviene riferirsi a modelli semplificati di atmosfera, basati su ipotesi di profili verticali di ρ e di T_v che non diano problemi di integrazione. Iniziando dalla ***formula barometrica nella densità***, partiamo dalla ipotesi più elementare, anche se raramente trovata in atmosfera, di densità costante con la quota (atmosfera cosiddetta ***omogenea*** , che permette - come vedremo nel paragrafo (3.10) – di definire una ulteriore significativa altezza di scala).

3.10 - Atmosfera omogenea.

Si definisce "omogenea" quell'atmosfera per la quale si può ipotizzare un profilo di densità costante con la quota, ossia:

$$\rho(z) = \rho_0 = \cos t.$$

Dalla [**A**], integrata fra p_o e p e fra 0 e z, si ha:

[**C**] $$p(z) = p_0 - \rho_0 gz$$

Nell'atmosfera omogenea, quindi, la pressione decresce linearmente. Si ha in tal modo la "**formula barometrica della idrosfera**", così denominata perché, nel mare, la pressione aumenta linearmente con la profondità.

Differenziando rispetto a z la temperatura T_v [6], definita da $T_v = \dfrac{p}{R_d \rho_0}$, si ottiene:

$$\frac{dT_v}{dz} = \frac{1}{R_d \rho_0} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{R_d \rho_o}\left(-g\rho_o\right) = -\frac{g}{R_d}$$

da cui:

$$\gamma_A = \left(-\frac{dT_v}{dz}\right)_{A.O.} = \frac{g}{R_d} = 3.43K/100m = 3.43 \cdot 10^{-2} K/m \qquad (3.29)$$

γ_A è detto anche "lapse rate" di autoconvezione. E' la distribuzione verticale di T che consente l'incompressibilità dell'aria *(ρ_0 = cost)*.

Lo spessore della atmosfera omogenea è finito: infatti, l'atmosfera omogenea arriva fino ad una altezza H ove la pressione si annulla:

---

[6] In questo Capitolo indichiamo la temperatura media dell'atmosfera con il simbolo T, in quanto non vi e' pericolo di confonderla con le temperature di particelle d'aria che, singolarmente , si spostano in essa lungo la verticale. Nel Capitolo 4 della Termodinamica vedremo che la temperatura media dell'atmosfera dovra' essere specificata con il simbolo T_e , in quanto le temperature individuali delle singole particelle d'aria che salgono o scendono potranno assumere valori differenti dalla temperatura media dell'atmosfera alle medesime quote.

$$z_{top} = H \Rightarrow p(H) = 0$$

Dalla [**C**] si ha $p(H) = 0 = p_o - \rho_0 gH$, ossia:

$$p_0 = \rho_0 gH \ ,$$

ovvero anche $H = \dfrac{p_0}{\rho_0 \, g}$.

Applicando quindi la legge dei gas al livello inferiore, ove z=0, $T_v = T_{v_0}$ e p=p_0, si ottiene:

$$\frac{p_0}{\rho_0} = R_d T_{v_0} \qquad (3.30)$$

da cui, applicando l'equazione (3.30), si vede anche che la temperatura alla base (z=0) di una atmosfera omogenea di densita' ρ_0 = cost e' data dalla semplice formula :

$$T_{v_0} = \frac{1}{R_d}\frac{p_0}{\rho_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_0}{\rho_0 \, g} = \frac{R_d \, T_{v_0}}{g} = H \qquad (3.30a)$$

Riprendendo nuovamente l'equazione [C], si ottiene da essa, applicando ancora l'equazione (3.30), l'espressione:

$$H = \frac{p_0}{\rho_0 g} \Rightarrow \frac{R_d T_{v_0} \rho_0}{\rho_0 \ g} = \frac{R_d T_{v\,0}}{g} \qquad (3.30b)$$

H, quindi, oltre ad essere lo spessore effettivo dell'atmosfera omogenea, diviene anche altezza di scala per altre atmosfere. Questo concetto verrà approfondito nel seguito.

Dalla (3.30b) si vede infine che lo spessore H di una atmosfera omogenea dipende solo dalla temperatura dell'aria alla superficie terrestre, ed e' una quantità finita. Alla temperatura di riferimento T_0 = 273 K (t_0 = 0 ^{0}C) si ha il particolare spessore:

$$H_0 = \frac{273 R_d}{g} = \frac{273 \bullet 278}{9{,}81} \equiv 8000m$$

3.11 - Atmosfera con densità funzione della quota.

Passiamo ora a ipotesi più generali sull'andamento di ρ con la quota. Consideriamo un'atmosfera con $\rho(z)$ qualunque. Se differenziamo logaritmicamente l'equazione di stato $p(z) = R_d\, \rho(z) T_v(z)$, otteniamo:

$$\ln p(z) = \ln \rho(z) + \ln R_d + \ln T_v(z)$$

ossia:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT_v}{T_v}$$

Dividendo per *dz*, si ha*:*

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dz} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{T_v}\frac{dT_v}{dz} \qquad [X]$$

Essendo però, per la legge fondamentale della Statica e per la legge di stato dei gas:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{R_d \ \rho \ T_v}$$

l’espressione [X] sopra riportata si modifica nel modo seguente:

$$-\frac{1}{R_d \ \rho \ T_v} \rho g = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{T_v}\frac{dT_v}{dz} \Rightarrow -\frac{1}{T_v}\frac{g}{R_d} = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} + \frac{1}{T_v}\frac{dT_v}{dz}$$

Raccogliendo, in quest’ultima equazione, il termine $\frac{1}{T_v}$ a fattore comune,

si ha:

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{T_v}\left[-\frac{g}{R_d} - \frac{dT_v}{dz}\right] = \frac{1}{T_v}\left[-\gamma_A + \gamma\right] = \frac{1}{T_v}\left[\gamma - \gamma_A\right] = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}$$ [7]

essendo $\frac{g}{R_d} = \gamma_A$ [vedi eq. (3.29) per il “lapse rate” di autoconvezione

$\gamma_A = \frac{g}{R_d} = 3.43 \frac{K}{100 \ metri}$]

Questa analisi ci mostra in modo evidente che, se:

$\gamma = \gamma_A, \ \frac{d\rho}{dz} = 0$ ossia $\rho(z) = \rho_0 = cost$ (stabilità indifferente se non vi sono perturbazioni)

$\gamma > \gamma_A, \ \frac{d\rho}{dz} > 0$ [instabilità assoluta, anche in assenza di perturbazioni]

$\gamma < \gamma_A, \ \frac{d\rho}{dz} < 0$ [stabilità se non vi sono perturbazioni]

L’atmosfera terrestre può presentarsi nelle condizioni di “omogeneità” (densità costante con la quota) solo in particolari situazioni (intenso

---

7 Facciamo nuovamente presente che questo risultato e’ stato ottenuto risolvendo l’equazione rispetto a $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz}$, ottenendo $\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dz} = \frac{1}{t_v}\left[-\frac{g}{R_d} - \frac{dT_v}{dz}\right] = \frac{1}{T_v}(\gamma - \gamma_A)$, essendo $\frac{dT_v}{dz} = -\gamma$

riscaldamento del suolo da parte del Sole) e per sottili spessori (pochi decimetri al massimo, ossia in strati entro i quali si sviluppa la vegetazione più bassa). Anche in questo caso si e' scritto $\gamma = -\frac{dT}{dz}$, mentre più avanti scriveremo $\gamma_e = -\frac{dT_e}{dz}$ per le ragioni esposte nella nota del par. 3.10.

γ_A e' invece stato scritto in modo corretto, perchè é univocamente definito dal rapporto fra le due grandezze universali g e R_d .

3.12 - Atmosfera isoterma.

Si consideri ora la II equazione barometrica, quella nella $T_v(z)$.

Come prima ipotesi, speculare a quella della densità, ipotizziamo che:

$$T_v(z) = \cos t = T_{v_0}$$

Integrando la II formula barometrica con questa condizione e ricordando la (3.28) con $T_v(z) = T_{v_0}$ si ha la ***formula ipsometrica*** per atmosfera isoterma:

$$\ln p(z) = \ln p_0 - \frac{gz}{R_d T_{v_0}} \tag{3.31}$$

ossia:

$$\textbf{(D)} \qquad p(z) = p_0\, exp\left[-\frac{gz}{R_d T_{v0}}\right] \qquad \textbf{Formula ipsometrica}$$

Dalla formula ipsometrica si vede che $p(z) = 0$ per $z = \infty$, ossia l'atmosfera isoterma ha spessore infinito.

Per l'atmosfera isoterma può essere comunque individuata una altezza di "scala" finita nello spessore H dello strato d'aria nel quale la pressione si riduce di un fattore e (variazione tipica):

$$\frac{p}{p_0} = e^{-\frac{gH}{R_d T_{v_0}}} = e^{-1},$$

ossia:

$$H = \frac{R_d T_{v_0}}{g} = cost = \frac{p_0}{\rho_0 \; g} \qquad (3.32)$$

Nello strato di spessore H deve essere $T_{v_0} = cost$, essendo costanti le altre due grandezze $(R_d$ *e* $g)$ che la definiscono.

L'altezza di scala H appena definita equivale anche allo spessore di una atmosfera omogenea associata, la cui T_{v_0} al suolo sia la stessa di quella dell'atmosfera isoterma, con $T_v(z) = T_{v0} = cost$. A ogni quota z si può associare una altezza di scala per l'atmosfera isoterma, che è sempre la stessa.

Anche se $H_{A.O.}$ è espressa con la relazione $H_{A.O.} = \frac{p_0}{\rho_0 g}$, si dimostra, tramite l'equazione (3.30b), che $H_{A.O.} = cost$ rispetto a z per l'atmosfera isoterma.

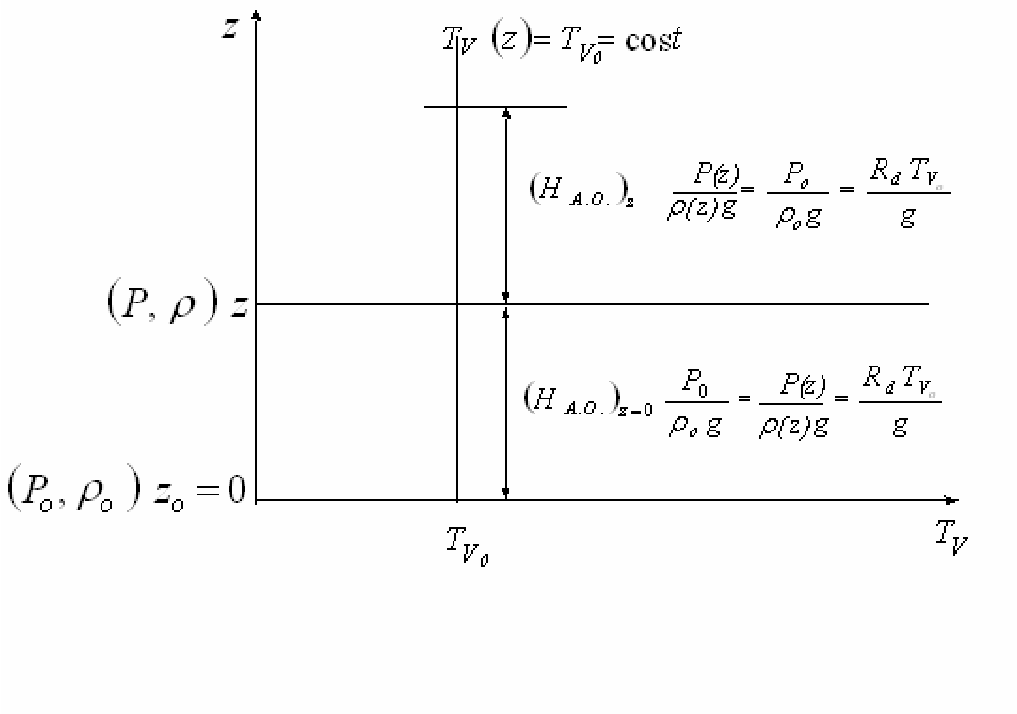


Fig. (3.7)

Infatti, con riferimento alla figura (3.7), la legge dei gas per due quote generiche ($z = 0$ e z) di un'atmosfera isoterma dà:

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R_d T_{v_0}} \qquad \text{e} \qquad \rho(z) = \frac{p(z)}{R_d T_v(z)} = \frac{p(z)}{R_d T_{v_0}}$$

da cui :

$$\frac{p_0}{\rho_0} = \frac{p(z)}{\rho(z)} = R_d T_{v_0}$$

e, infine:

$$\frac{p(z)}{\rho(z)} = \frac{p_0}{\rho_0} = cost, \qquad \text{ossia:} \qquad (H_{A.O.}) = \frac{p_0}{\rho_0 g} = cost \text{ nell'atmosfera isoterma.}$$

Da quest'ultima relazione si ottiene anche la variazione verticale di ρ nell'atmosfera isoterma (ricordando la formula ipsometrica [**D**]):

$$\rho(z) = \frac{p(z)}{p_0}\rho_0 = \rho_0 \exp\left[-\frac{gz}{R_d T_{v_0}}\right] \qquad (3.33)$$

Quindi, nella atmosfera isoterma, $p(z)$ e $\rho(z)$ hanno la stessa legge di variazione esponenziale con la quota *z* e si annullano entrambe a z = ∞.

3.12a– Atmosfera politropica .[8] $\left(-\frac{dT}{dz} = \gamma = \text{costante}\right)$

L'atmosfera isoterma, benché rappresenti un caso particolare della atmosfera reale, costituisce una soddisfacente approssimazione anche nelle situazioni in cui la distribuzione verticale della temperatura atmosferica non sia costante. Vedremo infatti che nel caso di una distribuzione arbitraria di *T* con *z*, si perviene a una formula barometrica formalmente simile a quella ricavata nell'approssimazione isoterma.

Analogamente a quanto fatto con le distribuzioni di densità consideriamo ora un modello di distribuzione di temperatura di seconda approssimazione, ossia il modello, detto *politropico*, in cui la temperatura varia linearmente con la quota (lapse rate costante), definito da:

$$\frac{dT}{dz} = -\gamma = \cos t, \quad \text{da cui} \quad T = T_0 - \gamma z \qquad (3.33a)$$

[8] L'attributo *politropico* è qui spiegato dal fatto che viene ora introdotto un gradiente termico verticale determinato da un processo termico adiabatico, il quale, avendo *C = cost = 0*, è un caso particolare dei processi politropici, Vedi anche C. Castagnoli, Fisica Generale, 1984, pag. 586.

Lo spessore dell'atmosfera politropica è finito e coincide con la quota alla quale T si annulla. A questa quota, data da $z_{top} = \frac{T_0}{\gamma}$, si annulla anche la pressione. [vedere anche l'equazione (3.31)].

Supponendo l'atmosfera "secca" $\left(T_v = T_0 - \gamma z = T\right)$ e sostituendo T dalla (3.33a) nella (3.31), otteniamo:

$$\log p = \log p_0 - \frac{1}{R_d} \int_0^z \frac{g\,dz}{T_0 - \gamma z}$$

da cui, integrando, giungiamo all'espressione della formula barometrica per l'atmosfera politropica:

$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R_d \gamma}} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R_d \gamma}} \qquad (3.33b)$$

La pressione, secondo l'equazione (3.33b), diminuisce più rapidamente al crescere del valore di γ, una volta fissati p_0 e T_0. La densità dell'aria è data dall'espressione seguente:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{T_0 - \gamma z}{T_0}\right)^{\frac{g}{R_d \gamma} - 1} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{g}{R_d \gamma} - 1} \qquad (3.33c)$$

e la temperatura da:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R_d \gamma}{g}} \qquad (3.33d)$$

3.12.a1 – Trasformazioni politropiche.

Ricordiamo qui alcune considerazioni di termodinamica allo scopo di chiarire il significato di "*atmosfera politropica*" introdotto nel paragrafo precedente.
E' noto che una trasformazione politropica e' una trasformazione a calore specifico del sistema costante (C_V = cost, C_P = cost), che obbedisce alla legge $pa^n = cost$, con n indice della politropica.
Dati due strati della trasformazione, si ha:

$$\frac{p\alpha^n}{p_0 a^n{}_0} = 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{\alpha}{\alpha_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{1}{n}}$$

con $n = \left(\frac{c_p - c}{c_v - c}\right)$,

essendo "*c*" il calore specifico del processo politropico (= 0 se il processo e' anche adiabatico)

Dall'equazione di stato, si ricava:

$$\frac{p\alpha}{p_0\alpha_0} = \frac{T}{T_0}$$

per cui

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}} \qquad (3.33e)$$

Confrontando la (3.33e) con la (3.33d), si constata che la legge che lega la temperatura alla pressione in atmosfera politropica (che ha assunto per questo tale nome) e' analoga a quella ottenuta per trasformazioni politropiche. Uguagliando gli esponenti, si ottiene:

$$\frac{n-1}{n} = \frac{R_d \gamma}{g} \quad \text{da cui} \quad n = \frac{g}{g - R_d \gamma^*} \qquad \text{con} \quad \gamma^* = \frac{g}{R_d} \frac{n-1}{n}$$

dove con γ^* si indica una variazione "individuale" [9] di temperatura per spostamento verticale unitario:

Un caso particolare di trasformazione politropica e', come si e' gia' detto, quella adiabatica, per la quale $n = \frac{c_p}{c_v}$. In tal caso e':

$$\frac{R_d \gamma_a^*}{g} = \frac{n-1}{n} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = \frac{R_d}{c_p} = k = \frac{287}{1003} = 0{,}286$$

essendo c_p = 1003 joule kg^{-1} K^{-1}.

Quindi:

[9] Vedremo meglio nel capitolo successivo, dedicato alla termodinamica, la differenza fra *lapse rate* dell'atmosfera, inteso come variazione verticale di temperatura dell'aria quale puo' essere misurata con un sondaggio termico ad un istante qualsiasi (e quindi variabile di volta in volta a seconda degli eventi dinamici e termodinamici che hanno contribuito a portare l'atmosfera in quella condizione) e il *lapse rate* individuale, inteso come variazione di temperatura di una ben identificata particella d'aria che subisce un ben identificato processo termodinamico

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^k$$

e

$$\gamma_a{}^* = \left(-\frac{dT}{dz}\right)_a = \frac{g}{R_d}\frac{R_d}{c_p} = \frac{g}{c_p} = \frac{9{,}80}{1003} \cong 1K/100m = 10^{-2}\,K\;m^{-1}$$ [10]

3.12.b - Atmosfera con profilo verticale di temperatura qualsiasi.

Come terza (ed ultima) approssimazione,consideriamo ora una distribuzione verticale arbitraria di temperatura. Ricordando che $T_v = T(1+0.608\,s)$, la [B] può scriversi:

$$-\frac{dp}{p} = \frac{g}{R_d}\frac{dz}{T(1+0.608s)} \qquad (3.33f)$$

da cui si ricava:

$$dz = -\frac{R_d\,T}{g}(1+0.608\,s)\frac{dp}{p} \qquad (3.33g)$$

La differenza fra la (3.33f) e la (3.33g) sta essenzialmente nel fatto che la prima esprime la dipendenza di *p* (variabile dipendente) da *z* (variabile indipendente), mentre la seconda esprime la dipendenza di *z* (variabile dipendente) da *p* (variabile indipendente).

---

[10] Si noti che, avendo specificato la particolare trasformazione termodinamica (politropica adiabatica), il *lapse rate* e' ora indicato con il simbolo γ_a , dove il pedice a sta per *adiabatica.* Ricordiamo che, nel caso dell'atmosfera omogenea, il *lapse rate* era stato indicato con γ_A (autoconvettivo): in quel caso pero' si trattava di una condizione dell'atmosfera.

Integriamo ora la (3.33g) da $z_1\left(dove\ p = p_1\right)$ a $z_2\left(dove\ p = p_2\right)$; utilizzando il teorema del valor medio del calcolo integrale, sostituiamo a T e a s i loro valori medi T_m e s_m. Otteniamo così, per lo strato $z_2 \div z_1$:

$$z_2 - z_1 = -\frac{R_d\, T_m}{g}\left(1 + 0.608\, s_m\right)\log\frac{p_2}{p_1} \tag{3.33h}$$

ovvero, per aria secca $\left(s_m = 0\right)$:

$$p_2 = p_1 \exp\left[-\frac{g\left(z_2 - z_1\right)}{R_d\, T_m}\right] \;\rightarrow\; \ln p_1 - \frac{g\left(z_2 - z_1\right)}{R_d T_m} \tag{3.33i}$$

La (3.33i) è la formula barometrica generale, o formula di Laplace. Si osserva che T_m, detta anche *temperatura barometrica media*, è legata alla temperatura dell'aria $T(z)$ dalla relazione:

$$T_m = \frac{z_2 - z_1}{\int_{z_1}^{z_2}\frac{dz}{T(z)}} \tag{3.33 l }$$

T_m è quindi la temperatura costante di uno strato la quale, secondo la (3.33i), dà le pressioni al livello inferiore e superiore effettivamente osservate nello strato reale dove la temperatura varia con l'altezza. Spesso, nei calcoli pratici, si usa l'approssimazione $T_m = \frac{T_1 + T_2}{2}$ dove T_1 e T_2 sono le temperature alle quote z_1 e z_2.

La (3.33i) ha la stessa forma della (3.31), ossia della formula ipsometrica per atmosfera isoterma; la differenza fondamentale consiste nel fatto che la

(3.331) è valida solo per uno strato di dato spessore finito, per il quale T_m deve venire determinato volta per volta.

Se lo spessore cambia, in generale anche T_m varia, ossia la formula (3.331) e la temperatura barometrica media non sono indipendenti, ma strettamente intercorrelate.

Nel caso dell'atmosfera isoterma, invece, la temperatura è indipendente dallo spessore dello strato considerato.

3.13 - Formula barometrica generale.

Ricordiamo la formula barometrica nella T_v vista prima per l'atmosfera isoterma { Eq. [D] del paragrafo (3.12)}, scrivendo ora $T_{v_{e\,0}}$ dal momento che si considera l'atmosfera "ambiente". Si era ottenuta in tal modo la cosiddetta formula ipsometrica per l'atmosfera isoterma:

$$p(z) = p_0 \exp\left[-\frac{gz}{R_d T_{v_{e\,0}}}\right]$$

[FORMULA IPSOMETRICA PER ATMOSFERA ISOTERMA]

Ricordiamo inoltre la formula più generale (3.33.a1) per l'atmosfera politropica scritta pero' ora per una $T_{v_e}(z)$ qualunque. Otteniamo cosi' la formula:

[E] $$\ln p(z) = \ln p_0 - \frac{1}{R_d}\int_0^z \frac{g\,dz}{T_{v_e}(z)} \Rightarrow \ln\frac{p_2}{p_1} = -\frac{1}{R_d}\int_{z_1}^{z_2} \frac{g\,dz}{T_{v_e}(z)}$$

che è l'integrale della:

$$-\frac{dp}{p}=\frac{g(z,\vartheta)dz}{R_d T_{v_e}(z)}=\frac{g(z,\vartheta)}{R_d}\frac{dz}{T_e(z)(1+0{,}608s(z))}=\frac{dz}{\frac{R_d T_e(z)[1+0{,}608s(z)]}{g(z,\vartheta)}}$$

dove $T_e(z)$ e $T_{ve}(z)$ indicano, rispettivamente, le temperature assoluta e virtuale ambientale alla quota *z* e θ e' la latitudine.

Con l'applicazione del teorema del valor medio del calcolo integrale e ponendo $g = cost$ [11], si ottiene un'espressione integrale "simile" alla formula IPSOMETRICA, riferita però a strati *(z_1, p_1) ÷ (z_2, p_2):*

[F] $$\ln\frac{p_2}{p_1}=-\frac{(z_2-z_1)g}{R_d\,[T_e(1+0{,}608s)]_m}\equiv-\frac{(z_2-z_1)g}{R_d\,T_{v_{e_m}}}$$

ovvero:

[G] $p_2 = p_1 \exp[-\frac{g(z_2-z_1)}{R_d T_{v_{em}}}$ **Formula barometrica generale**, o **di LAPLACE,** gia' vista come equazione (3.33i), dove:

$T_{v_{em}} = f(z_2, p_2 \div z_1, p_1) =$ Temperatura barometrica (virtuale) media

definita da:

$$\int_{z_1}^{z_2}\left[\frac{1}{T_{v_e}(z)}\right]dz=\left[\frac{1}{T_{v_e}}\right]_m(z_2-z_1)\cong\frac{1}{T_{v_{em}}}(z_2-z_1)$$

[11] Si era visto che, usando la pressione al posto della quota come coordinata verticale, non era necessario fare questa ipotesi, dal momento che *g* veniva "assorbito" nel geopotenziale *Φ*.

come si può vedere confrontando **[E]** e **[F]**:

$$\frac{z_2 - z_1}{T_{v_{e_m}}} = \int_{z_2}^{z_1} \frac{dz}{T_{v_e}(z)}$$

da cui: $T_{v_{e_m}} = \dfrac{z_2 - z_1}{\int_{z_1}^{z_2} \dfrac{dz}{T_{v_e}(z)}}$ (definita per lo strato $z_2 - z_1$) [**ψ**]

$T_{v_{e_m}}$ è la temperatura virtuale (costante) che, associata allo strato $z_2 - z_1$, dà le effettive pressioni p_1 e p_2 osservate a z_1 e z_2, secondo la [**F**]

Questa temperatura barometrica media serve a costruire una altezza di scala (Fig.3.8) che esprime una sorta di "e-folding" (ragione della progressione geometrica della caduta verticale di pressione) nel caso di variazione verticale qualsiasi di T_{v_e} :

[**H**]

$$H_m = \frac{R_d T_{v_{e_m}}}{g}$$

H_m rappresenta lo spessore Δz^* entro cui la pressione si ridurrebbe di un fattore "*e*" per T_{v_m} costante.

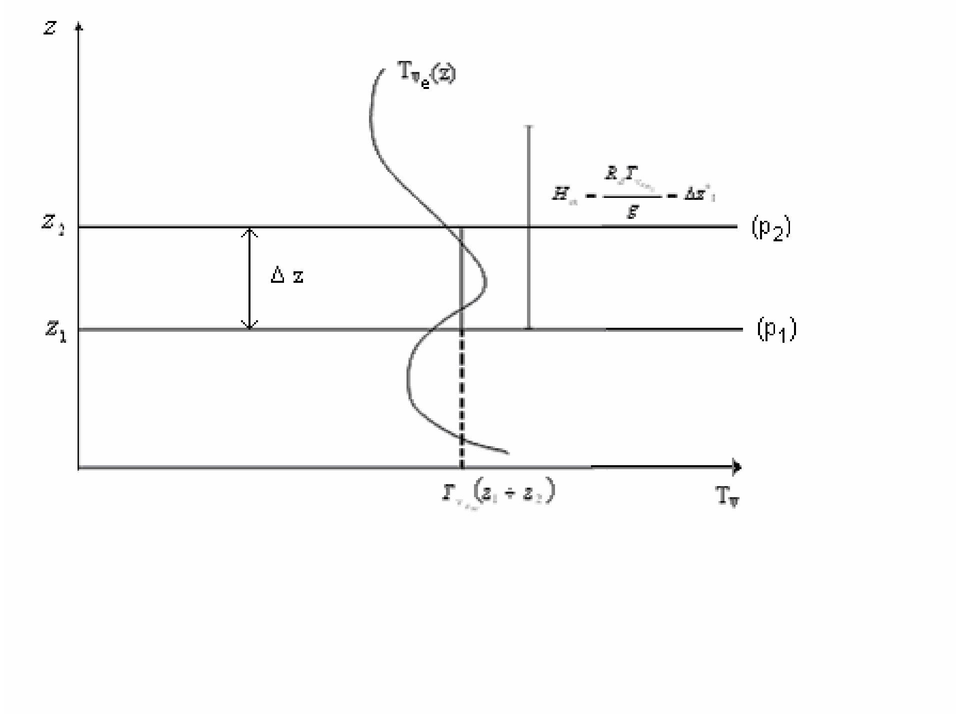


Fig. (3.8)

Se si divide $\Delta z = z_2 - z_1$ (spessore geometrico reale dello strato considerato) per H_m, si ottiene la frazione di "e-folding" della pressione nello strato $z_2 - z_1$, ossia le pressioni p_1 e p_2 effettivamente osservate a z_1 e z_2.

In base alla **[H],** si vede che T_{vem} è anche la temperatura alla base dello strato H_m . H_m , definita in termini di $(z_2 - z_1)$ attraverso la [**ψ**], non è *H(z)*, altezza di scala dell'atmosfera con profilo termico *T(z)* qualsiasi che verrà definita più avanti.

Altezze di scala uguali possono naturalmente riferirsi a strati di diverso spessore $(z_2 - z_1)$, ma aventi la stessa T_{ve_m} (ricordiamo ancora che le altezze di scala non sono gli spessori degli strati).

I problemi della definizione di $T_{v_{e_m}}\left[\left(\overline{\frac{1}{T_{v_e}}}\right)=\frac{1}{\overline{\overline{T_{v_e}}}}\right]$ si semplificano scrivendo la **[G]** risolta rispetto a *z*:

$$dz=-\frac{R_d T_{v_{e\ m}}(z)}{g}\frac{dp}{p}=-\frac{R_d T_e(z)}{g}\left[1+0.608\,s(z)\right]\frac{dp}{p}$$

da cui:

[**I**] $$g\,dz=dV=-R_d\,T_{v_e}(z)\frac{dp}{p}$$

con dV = differenziale del geopotenziale $V=gz$.

3.14 - Formula ipsometrica per strato isotermo in coordinate di pressione.

Integrando la [**I**] si ottiene:

[**L**] $$\int_{z_1}^{z_2} g\,dz=V(z_2)-V(z_1)=-R_d\int_{p_1}^{p_2}T_{v_e}(p)\,d\ln p$$

La [L] prende anche il nome di ***Equazione barometrica altimetrica in coordinate di pressione***.

Applicando ancora il teorema del valor medio del calcolo integrale, si ha:

$$V(z_2) - V(z_1) = -\overline{T_{v_e}}\, R_d \ln\frac{p_2}{p_1} = \overline{T_{v_e}}\, R_d \ln\frac{p_1}{p_2}$$

con:

$$\overline{T_{v_e}} = \frac{\int_{p_2}^{p_1} T_{v_e}(z)\, d(\ln p)}{\int_{p_2}^{p_1} d(\ln p)} = \frac{\int_{p_2}^{p_1} T_{v_e}(z)\, d(\ln p)}{\ln\frac{p_1}{p_2}}$$

3.15 - Rappresentazione di isobare in coordinate geometriche e di iso-geopotenziali in coordinate di pressione.

Le equazioni **[I]** e **[L]** introducono il geopotenziale *V* e la sua distribuzione verticale in funzione di *p*.

Si tratta di una rappresentazione in coordinate di pressione (*p* è la variabile indipendente) o coordinate isobariche.

La relazione **[L]** esprime l'energia potenziale (o geopotenziale) per unità di massa [Jkg^{-1}] dell'aria sulle superfici isobariche.

Il segno opposto della pendenza delle linee isopotenziali $V = gz$ rispetto alle isobare (*p = cost*) nella figura (3.9c) dipende dal fatto che l'asse *p* è orientato con i valori crescenti verso l'alto, mentre in realtà la pressione diminuisce al crescere di *z*.

V rappresenta, come già visto, anche il lavoro compiuto per effettuare scambi verticali di masse d'aria unitarie (lavoro per portare *1 kg* di aria da *z = 0* al livello *z* considerato).

Quando masse d'aria di diversa densità si scambiano fra di loro verticalmente, il baricentro della colonna d'aria può salire o scendere, per cui l'energia potenziale (o geopotenziale)

$$V(z) = \int_0^z g\, dz$$

di quella colonna cambia.

Ritorniamo alla legge della statica trasformata con l'equazione di stato dei gas e risolviamola rispetto a *dz*.

$$-\frac{dp}{dz}=\rho g=\frac{p}{R_d T_{v_e}}g \Rightarrow dz=-\frac{R_d T_{v_e}}{g}\frac{dp}{p}$$

da cui:

$$gdz=dV=-R_d T_{v_e}\frac{dp}{p}$$ che non è altro se non la **[I]**

ossia:

$$dV=-R_d T_{v_e}\, d(\ln p)$$

ossia ancora:

$$\frac{dV}{d(\ln p)}=-R_d T_{v_e}$$ ***Legge barometrica in coordinate di pressione***

Integrando, si ottiene:

$$\Delta V=V(z_2)-V(z_1)=R_d\int_{p_2}^{p_1} T_{v_e}(p)\,d(\ln p)=R_d\overline{T}_{v_e}\ln\frac{p_1}{p_2}$$

che è l'equazione [**L]** già vista, detta anche **formula ipsometrica per strato isotermo in coordinate di pressione**, con riferimento alla formula ipsometrica per atmosfera isoterma:

$$p(z)=p_0\exp\left[-\frac{gz}{R_d T_{v_{e0}}}\right]$$

3.16 - Trasformazioni da coordinate geometriche a coordinate di pressione.

La relazione monotona fra *p* e *z* espressa dalla legge idrostatica suggerisce la possibilità di usare *p* come coordinata verticale indipendente e *z* come variabile dipendente.

Consideriamo un campo spaziale di pressione che presenti variazioni, o gradienti, orizzontali; tali gradienti sono calcolabili derivando $p(x,y,z)$ a $z = \cos t$.

Supponiamo che le superfici isobariche siano inclinate, nello spazio (z,x), come mostrato nelle figure (3.9a) e (3.9b)

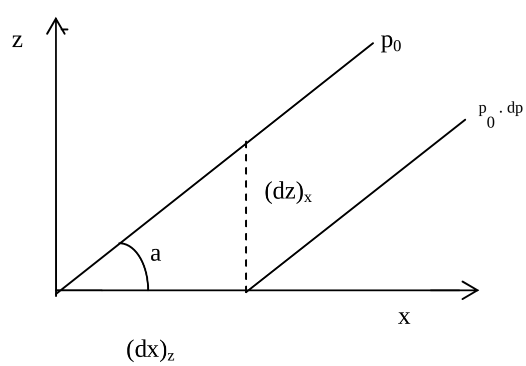


Fig. (3.9a)

Per trovare l'espressione che, in coordinate di pressione , sostituisce il $\nabla_H p$ delle coordinate geometriche, ossia il termine che, moltiplicato per $-\frac{1}{\rho}$, imprime all'unità di massa dell'aria l'accelerazione sul piano, partiamo da semplici considerazioni.

Si vede, dalla figura (3.9a**)**, che:

$$(\delta z)_x = \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_p (\delta x)_z \quad \Rightarrow \quad (\delta x)_z = (\delta z)_x \left(\frac{\delta x}{\delta z}\right)_p$$

da cui:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \frac{(\partial z)_p}{(\partial x)_z} \quad \rightarrow \quad (\delta z)_x = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p (\delta x)_z \qquad \text{[a]}$$

Allora:

$$\left[\frac{(p_0 + \delta p) - p_0}{\delta x}\right]_{z=\cos t} = \left[\frac{p_0 - (p_0 + \delta p)}{\delta z}\right]_{x=\cos t} \cdot \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_{p=\cos t}$$

ossia:

$$\left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_z = \left(\frac{-\delta p}{\delta z}\right)_x \left(\frac{\delta z}{\delta x}\right)_p$$

Al limite per $\delta x, \delta z = 0$, si ha:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p$$

Applicando l'equazione della statica

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \rho \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_p \qquad \text{(a')}$$

[g è solo $f(z)$ e quindi può entrare in $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{p=\cos t}$ (per piccoli Δx)]

possiamo scrivere che:

$$[\nabla p]_z = \nabla_H p = \left[\frac{\partial p}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\vec{j}\right]_{z=\cos t} = \rho \nabla_p V \qquad \text{(a'')}$$

dove:

$$\nabla_p V = [\nabla V]_{p=\cos t} = \left[\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j}\right]_{p=\cos t}$$

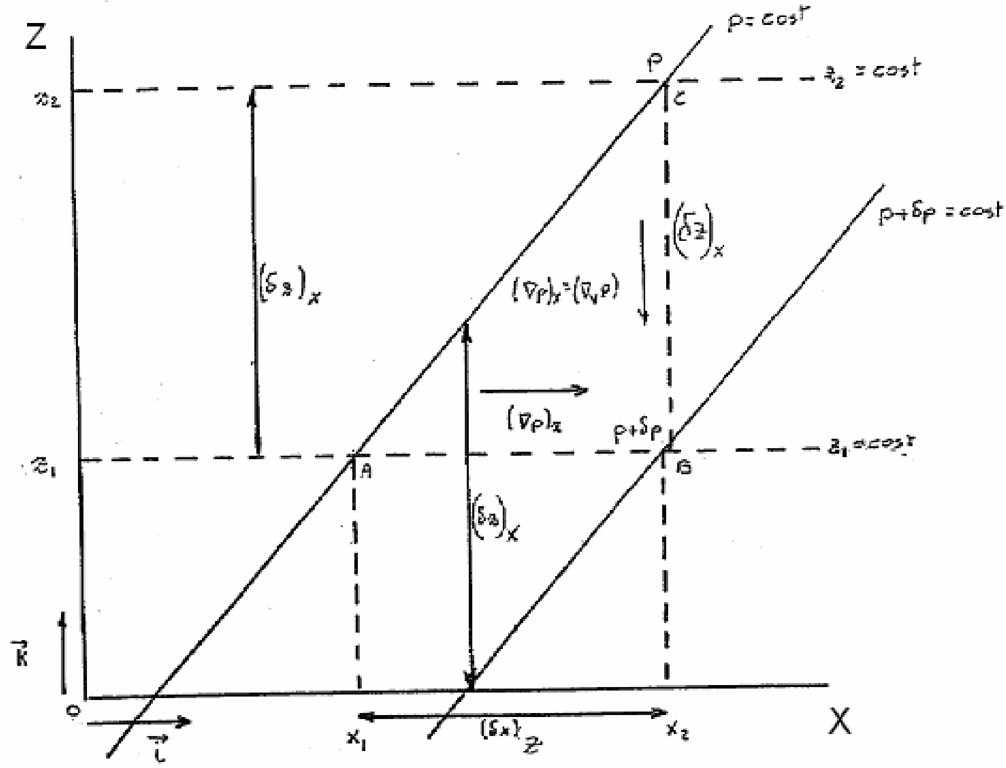
La relazione cercata è quindi:

$$\boxed{\nabla_p V = \frac{1}{\rho}\nabla_H p} \qquad (3.34)$$

Questa equazione mostra che la forza di gradiente orizzontale di pressione per unità di massa $\left(-\frac{1}{\rho}\nabla_H p\right)$ è sostituita, in coordinate isobariche, dal gradiente isobarico del geopotenziale $(-\nabla_p V)$, evidenziando il fatto che il lavoro compiuto dalle forze di gradiente orizzontale di pressione (date dalla differenza di pressione esistente fra due punti P_1 e P_2 sul piano orizzontale

z $=cost$) equivale, a meno di un fattore $\frac{1}{\rho}$, al lavoro compiuto dalle forze gravitazionali per spostare l'unita' di massa su una superficie isobarica inclinata, lavoro che e' dato dalla differenza di geopotenziale fra le proiezioni P'_1 e P'_2 su tale superficie dei punti P_1 e P_2 sulla superficie z = $cost$, nella figura (3.9a).

$p < p + \delta p$



$$(\nabla p)_z = \nabla_H p = \left[\frac{\partial p}{\partial x}\right]_z \vec{i} \equiv \frac{\left[(p+\delta p)-p\right]_{z=cost}}{x_2 - x_1}\vec{i} = \left(\frac{\delta p}{\delta x}\right)_{z=cost}\vec{i}$$

$\nabla_H p$ ≡ gradiente orizzontale di p

$(\nabla p)_z$ ≡ gradiente di p a $z = cost$, ossia orizzontale

$(\nabla p)_x = \nabla_V p$ = gradiente di p a $x = cost$, ossia verticale

Fig. (3.9b)

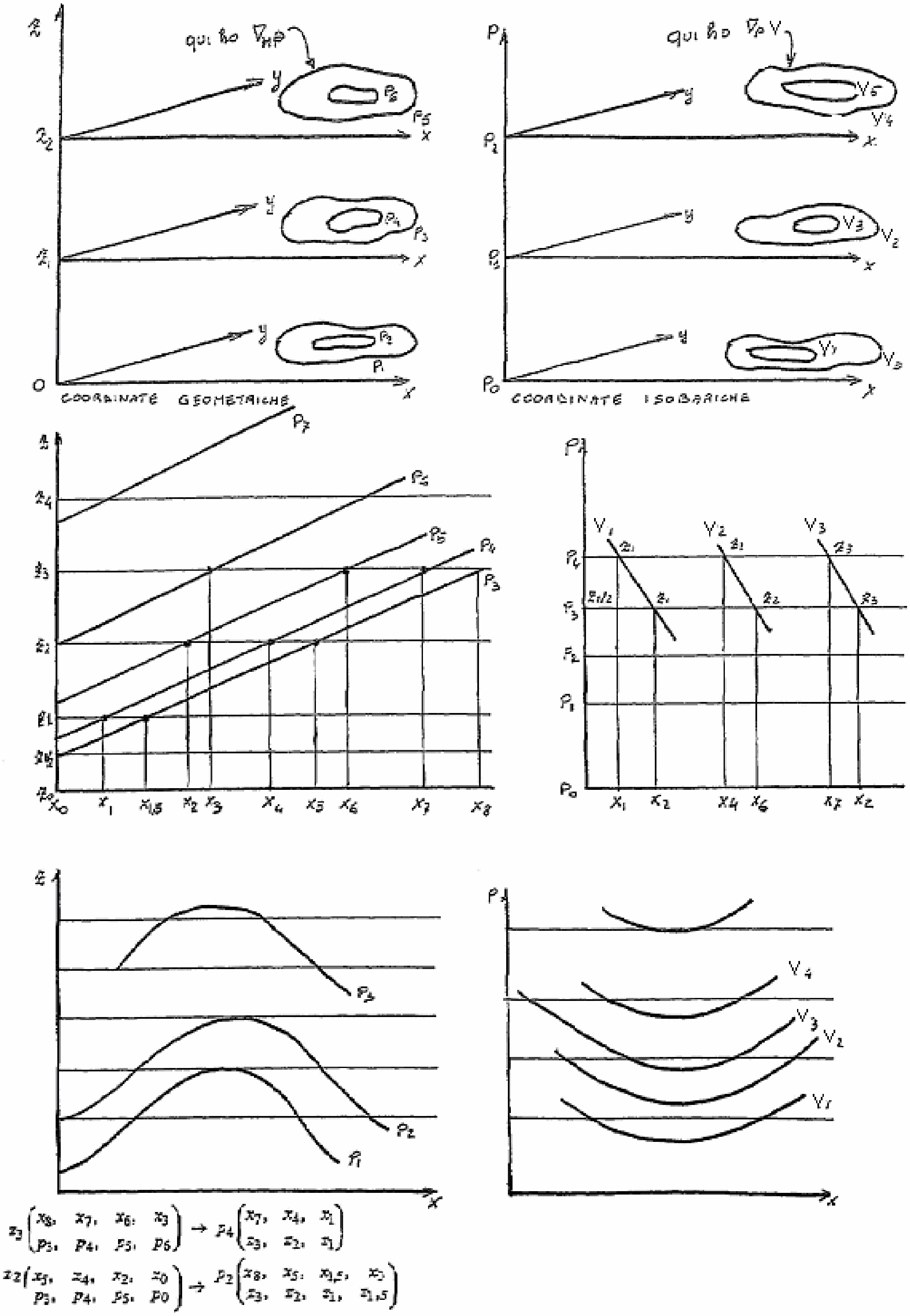

qui ho $\nabla_H P$
qui ho $\nabla_p V$
COORDINATE GEOMETRICHE
COORDINATE ISOBARICHE

Fig. (3.9c)

Si vede, inoltre, che la nuova espressione non contiene più la densità, il che rappresenta una sensibile semplificazione nella integrazione delle equazioni del moto. Per aggirare, invece, le difficoltà che sorgono quando vi sono variazioni spaziali (dovute, ad esempio, alla topografia) e/o temporali della pressione alla superficie terrestre, si introduce una nuova coordinata verticale di pressione *generalizzata*, o *normalizzata*. E' la cosiddetta coordinata definita da:

$$\sigma = \frac{p(x, y, z, t)}{p_0(x, y, t)} \tag{3.34a}$$

Sulla superficie terrestre, $\sigma = 1$ per definizione.

3.17 - Riepilogo sulle altezze di scala e sul loro utilizzo nello "scaling" dell'atmosfera reale.

Abbiamo visto le altezze di scala:

a) dell'atmosfera omogenea:

$H_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g}$ **,** che è anche altezza di tale atmosfera;

b) dell'atmosfera isoterma:

$H_{is} = \frac{R_d T_{v_0}}{g} = \frac{p_0}{\rho_0 g} = \textit{cost} \ \ (\textit{con } z)$

Per $T_{v_0} = 273K$, $H_{is_o} = \frac{287 \cdot 273}{9.81} \cong 8 \cdot 10^3\, m = 8\, Km$, per cui avevamo gia' concluso che $H_0 = H_{is}$ è anche l'altezza di *e-folding* della pressione per l'atmosfera isoterma.

c) dell'atmosfera generale (formula barometrica generale in coordinate geometriche): lo spessore dello strato $\lfloor z_2 \div z_1 \rfloor$ che compare nell'esponenziale viene scalato con $H_m = \frac{R_d T_{v_m}}{g}$, ossia con l' altezza di scala riferita allo strato "*isotermo* (T_{v_m})" di spessore $\lfloor z_2 - z_1 \rfloor$, per dare:

$\frac{z_2 - z_1}{H_m} = \frac{g(z_2 - z_1)}{R_d T_{v_m}} \equiv$ frazione di e-folding della pressione da z_1 a z_2.

d) dell'atmosfera generale (formula barometrica generale in coordinate di pressione):

$H_{mgp} = \frac{R_d \overline{T}_v}{g_0}$ altezza di scala riferita allo strato "*isotermo* ($\overline{T}_v$)" di spessore $|p_2 - p_1|$

Riprendiamo ora l'atmosfera reale con il suo profilo termico $T_v(z)$. La sua equazione barometrica differenziale è:

$$-\frac{dp}{p} = \frac{g\,dz}{R_d T_v(z)}$$

Formiamo l'altezza di scala:

$$H(z_i) = \frac{R_d T_v(z_i)}{g}$$

con la quale, a ogni livello z_i, associamo all'atmosfera reale una atmosfera omogenea di spessore $H(z)$ funzione di z. Questa atmosfera omogenea sostituisce tutta la colonna d'aria sopra il livello z_i e produce, al livello z_i, la pressione p_i dell'atmosfera reale. $H(z_i)$ è anche l'altezza di e-folding locale della pressione, nell'ipotesi che da z_i in su $T(z)$ diventi costante, uguale a $T(z_i)$.

Verifichiamo la validità di quanto affermato.

Consideriamo, a tal fine, il livello z_i, dove la pressione vale p_i, la temperatura è T_{vi} e la densità è ρ_i. A questo livello la legge dei gas dà:

$$p_i = R_d \rho_i T_{vi} \quad \Rightarrow \quad \frac{p_i}{\rho_i} = R_d T_{v_i}$$

Sostituiamo ora l'atmosfera reale con la sua omogenea associata, di densità costante ρ_i, temperatura alla base z_i uguale a T_{vi} e spessore $H(z_i)$. $H(z_i)$ deve essere tale per cui la colonna di sezione unitaria di atmosfera omogenea associata eserciti, a z_i, la pressione p_i. Ma la pressione, come sappiamo, è il peso Q_i della colonna di sezione unitaria che, per l'atmosfera omogenea, vale $Q_i = \rho_i \, g \, H(z_i)$.

Uguagliando $Q_i = \rho_i \, g \, H(z_i)$ alla pressione $p_i = \int_{z_i}^{z_{top}} g \rho(z) dz = Q_i$, si ha, se Q_i deve corrispondere a p_i, il seguente risultato:

$$Q_i = p_i \quad \Rightarrow \quad \rho_i \, g \, H(z_i) = p_i$$

da cui l'altezza H che soddisfa tale condizione all'altezza z_i risulta essere:

$$H(z_i) = \frac{p_i}{\rho_i g} = \frac{R_d T_{vi}}{g}$$

Ciò permette di associare, a una generica atmosfera con profilo termico $T(z)$, l'altezza di scala "locale", definita per ogni z da:

$$H(z) = \frac{R_d T_v(z)}{g}$$

La Figura (3.8) esemplifica simbolicamente come può essere immaginata l'associazione dell'altezza di scala locale a una atmosfera con profilo termico $T(z)$.

Con questa altezza di scala, possiamo scrivere sia la legge dei gas, sia quella dell'idrostatica, in forme più compatte. Per il generico livello z_i, si ha:

$$\begin{cases} p(z_i) = \rho(z_i) R_d T_v(z_i) = \rho(z_i) R_d \dfrac{g}{g} T_v(z_i) = \rho(z_i) \dfrac{g R_d T_v(z_i)}{g} = \rho(z_i) g H(z_i) & (I) \\ \rho(z_i) = \dfrac{p(z_i)}{g H(z_i)} & (II) \\ -\dfrac{dp}{p} = \dfrac{gdz}{R_d T_v} = \dfrac{dz}{H} \quad \Rightarrow \quad -dp = \dfrac{p(z)}{H(z)} dz & (III) \end{cases}$$

ossia la legge di "e-folding" locale di p al livello z_i supposto che, per $z>z_i$, $T(z) = T(z_i) = cost$

Nel caso particolare di variazione lineare di H con z (atmosfera politropica)[12], l'equazione precedente è integrabile.

Si può ricavare, per l'atmosfera politropica, una espressione integrale di $p(z)$.

Infatti:

$H_{pol.} = \dfrac{T_e}{\gamma_e} = \dfrac{T_0 - \gamma_e z}{\gamma_{e0}} = \dfrac{T_0}{\gamma_{e0}} - z$ al livello z, essendo $\gamma_e = \gamma_{e0}$ (per definizione) nell'atmosfera politropica, e:

$$H_0 = \frac{T_0}{\gamma_0} \qquad \text{al suolo}$$

Posto:

$$H(z) = H_0 + \beta(z - z_0)$$

come si puo' evincere considerando il fatto che l'atmosfera e' politropica e che la sua espressione e' data da $T_v(z) = T_{v_0} - \gamma(z - z_0)$

[12] ricordiamo che abbiamo definito "***politropica***" l'atmosfera che presenta variazioni di temperatura lineari con z $[T(z) = T_0 - \gamma_0 z]$, con γ_0 = cost. Questa proprietà vale allora anche per H.

si ha:

$$-\frac{dp}{p}=\frac{dz}{H(z)}=\frac{dz}{H_0+\beta(z-z_0)}=\frac{1}{\beta}\left\{\frac{d\left[H_0+\beta(z-z_0)\right]}{\left[H_0+\beta(z-z_0)\right]}\right\}=\frac{1}{\beta}\frac{d\left[1+\beta\frac{z-z_0}{H_0}\right]}{\left[1+\beta\frac{z-z_0}{H_0}\right]}$$

Integrando questa espressione differenziale, si ottiene:

$$\ln\left(\frac{p}{p_0}\right)=-\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\beta\frac{z-z_0}{H_0}\right)$$

ossia:

$$p(z)=p_0\left(1+\beta\frac{z-z_0}{H_0}\right)^{-\frac{1}{\beta}}$$

Nel caso di *H(z)* arbitrario, si ha l'espressione integrale generale:

$$-\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{p}=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{H(z)}\Rightarrow-\ln\frac{p}{p_0}=\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{H(z)}$$

ossia:

$$p=p_0\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{H(z)}\right]$$

Con il teorema del valor medio del calcolo integrale, si ottiene:

$$p=p_0\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{H(z)}\right]=p_0\exp\left[-\int_{z_0}^{z}\frac{g\,dz}{R_dT_v(z)}\right]=p_0\exp\left[-\frac{g(z-z_0)}{R_dT_{v\,m}}\right]$$

risultato valido per lo strato $\lfloor z_0 \div z \rfloor$.

Ricordiamo che avevamo dedotto dall'equazione (3.7) che:

a) all'aumentare dell'altezza $(dz > 0)$, essendo $g\rho dz$ il prodotto di 3 fattori tutti positivi, deve corrispondere $dp < 0$, ossia la pressione decresce sistematicamente al crescere dell'altezza. E' questa una regolarità caratteristica della pressione, in quanto altre grandezze meteorologiche (temperatura, vento, umidità, ecc.) hanno andamenti più irregolari in funzione della quota.

b) Presa una colonna d'aria verticale, di base $1m^2$, peso Q e altezza compresa fra un dato livello z e il "*top*" dell'atmosfera z_a, poiché il peso di un suo strato elementare di altezza dz è uguale a $g\rho dz$, si può scrivere che:

$$Q = \int_z^{z_a} g\,\rho\,dz \tag{3.35}$$

Integrando la [3.7] da z, dove la pressione vale p, a z_a, dove la pressione si annulla per definizione, si ottiene:

$$-\int_p^0 dp = \int_z^{z_a} g\,\rho\,dz \quad \text{ovvero} \quad p = Q \tag{3.36}$$

La (3.36) conferma che la pressione atmosferica al livello z_0 è il peso di una colonna d'aria di sezione unitaria che si estende da z_0 alla sommità dell'atmosfera.

c) A una certa variazione dz dell'altezza corrisponde, secondo la (3.7), una variazione dp della pressione più o meno marcata, secondo il valore di ρ e di g. Poiché g è considerata costante, un aumento dz della quota sarà associato a una diminuzione *dp* della pressione tanto maggiore quanto più elevato sarà il valore della densità dell'aria. Poiché, salendo, ρ in generale diminuisce, ne consegue che a mano a mano che ci si innalza nell'atmosfera, la caduta di pressione *dp* corrispondente a una variazione *dz* sarà sempre più piccola.

3.17a - Coordinate isentropiche - Funzione di corrente di Montgomery.

Le coordinate isentropiche costituiscono quel particolare sistema di riferimento Cartesiano che usa la temperatura potenziale θ (definita piu' avanti nel capitolo della termodinamica) come coordinata verticale nella descrizione di flussi atmosferici "*adiabatici*", i quali hanno la proprieta' di conservare, per l'appunto, tale temperatura convenzionale nel loro movimento. Le ricaviamo qui come applicazione delle equazioni [a] e (3.34b) nelle quali la coordinata s viene qui sostituita dalla coordinata isentropica θ, ottenendo:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\vartheta - \frac{\partial p}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\vartheta = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\vartheta - \frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\vartheta$$

essendo:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial z}$$

Moltiplicando entrambi i membri per –a e applicando il principio della termodinamica per trasformazioni adiabatiche alle leggi dei gas della statica, otteniamo:

$$-\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = -\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\vartheta + \alpha\frac{\partial p}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\vartheta = -C_p\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_\vartheta - g\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\vartheta$$

ossia:

$$-\alpha\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = -\left[\frac{\partial\left(C_pT+V\right)}{\partial x}\right]_\vartheta = -\alpha\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)_\vartheta$$

dove con $\psi = C_pT + V$ e' indicata la cosiddetta funzione di corrente di Montgomery. In conclusione:

$$\frac{1}{\rho}\nabla_H p = \nabla_\vartheta \psi$$

3.18 – Grandezze igrometriche.

Abbiamo già definito l'umidità specifica all'inizio del paragrafo 3.6.
Come rapporto di mescolanza (M. R.), che abbiamo definito come la massa di vapore contenuta in un kg di aria secca, abbiamo l'espressione

$$x = \frac{M_v}{M_d} = \frac{\dfrac{e\alpha}{R_vT}}{\dfrac{(p-e)\alpha}{R_dT}} = \frac{R_d}{R_v}\frac{e}{p-e} \cong 0.622\frac{e}{p} \cong s \tag{3.36a}$$

essendo M_v e M_d le due masse specifiche dell'aria definite nel paragrafo (3.6), rappresentanti rispettivamente le masse frazionarie del vapore e della frazione secca contenute in 1 kg di aria ed espresse in unità adimensionali ($kg\,kg^{-1}$).

La (3.36a) e' stata ottenuta applicando l'equazione di stato dei gas per il vapore d'acqua $\left[\frac{e\alpha}{R_vT} = M_v\right]$ e dell'equazione di stato dei gas per il miscuglio secco $\left[\frac{(p-e)\alpha}{R_dT} = M_d\right]$.

Come si vede, data la piccolezza di *e* rispetto a *p*, nella pratica i valori di umidità specifica e di rapporto di mescolanza possono considerarsi coincidenti.

L'umidità relativa *u* (detta anche RH dall'inglese *Relative Humidity*) è invece il rapporto tra la massa di vapore presente in un dato volume d'aria e la massa di vapore che vi può essere contenuta, alla temperatura dell'aria, in condizione di saturazione:

$$RH = \frac{M_v}{M_{v_s}} = \frac{\dfrac{e\alpha}{R_v T}}{\dfrac{E\alpha}{R_v T}} = \frac{e}{E(T)} \cong \frac{s}{S(T)} \quad [13] \tag{3.37}$$

oltre il quale si ha il fenomeno della condensazione. L'umidità relativa di saturazione vale, ovviamente, 1. Nella pratica, si usa pero' prevalentemente la notazione (equivalente) 100%.

La pressione parziale di saturazione del vapor d'acqua è una funzione della temperatura (equazione di Clapeyron) e non dipende dalla pressione degli altri costituenti gassosi dell'atmosfera.

Anche l'umidità assoluta di saturazione è funzione della temperatura e non dipende dalla pressione atmosferica, mentre l'umidità specifica di saturazione è funzione sia della temperatura, sia della pressione dell'aria. Considerando, infatti, 1 chilogrammo d'aria, il suo volume cambia se cambia la pressione (a temperatura costante) e, di conseguenza, è richiesta una quantità diversa di massa di vapor d'acqua per raggiungere la saturazione.

3.19 – Ripartizione di Boltzmann della densità molecolare con l'altezza.

[13] Infatti, si può porre:

$$RH = \frac{M_v}{M_{v_s}} = \frac{\dfrac{M_v}{M_d}}{\dfrac{M_{v_s}}{M_d}} = \frac{s}{S(T)}$$

La legge della statica esprime una relazione macroscopica fra le grandezze densità, pressione, altezza e accelerazione di gravità.

E' interessante però vedere anche come vanno le cose dal punto di vista microscopico, Ciò può essere fatto ricorrendo ai principi fondamentali della termodinamica statistica e studiando l'influenza della gravità sulla distribuzione di densità delle molecole del gas atmosferico, assimilate qui ad un gas perfetto.

L'accelerazione di gravità modifica la distribuzione della componente *verticale* del moto di agitazione molecolare, ma non quella delle componenti *orizzontali*. Come risultato, si ha che le fluttuazioni positive della componente verticale w sono di ampiezza minore di quelle negative. Dall'altra parte, l'esperienza mostra che se la massa di gas è isolata termicamente, la sua temperatura, e quindi la velocità quadratica media molecolare $\bar{u}_m$, che vale $\sqrt{\frac{3\,RT}{Nm}}$, sono uniformi (m è la massa di una molecola e N è il numero di Avogadro).

In queste condizioni, ricordando l'espressione della pressione data dalla teoria cinetica dei gas perfetti:

$$p = \frac{1}{3}\nu m \bar{u}_m^{-2} = \nu KT$$

con ν = numero di molecole per unità di volume, si vede che la diminuzione della pressione atmosferica con la quota osservata microscopicamente in strati d'aria in cui la temperatura si mantiene costante non è dovuta a variazioni di $\bar{u}_m$, bensì di ν.

Differenziando l'espressione:

$$p = \nu KT$$

si ottiene:

$$dp = KT\,d\nu$$

Combiniamo questa espressione con la legge dell'idrostatica, ponendo $\rho = \nu m$; otterremo:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\nu}{\nu} = -\frac{mg}{KT}dz$$

da cui:

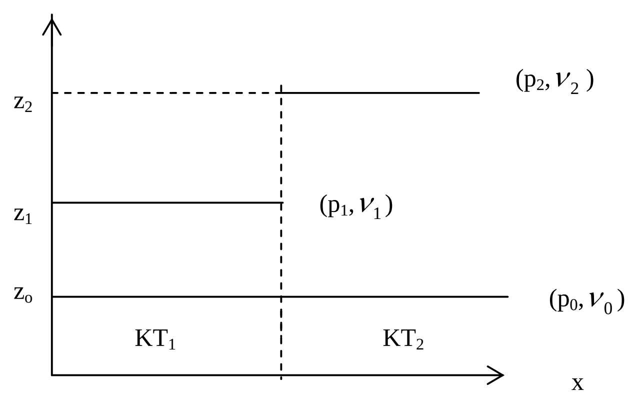
$$\nu = \nu_o \exp\left[-\frac{mg(z - z_o)}{KT}\right]$$

con ν_o = numero di molecole per unità di volume al livello di riferimento z_o scelto arbitrariamente. Data la proporzionalità fra pressione e numero di molecole per unità di volume, abbiamo ottenuto una nuova espressione per la formula barometrica, che esprime il fatto che la frazione $\frac{\nu}{\nu_o}$ (rapporto fra le densità molecolari medie z e a z_o, ovvero rapporto delle probabilità $\frac{\pi}{\pi_o}$ che una singola molecola si trovi al livello z o z_o) e' legata alla differenza di energia potenziale, dovuta al peso, che una molecola, posta alla quota z, ha in rapporto a un'altra molecola posta al livello z_o. Si ha quindi, per la ripartizione delle molecole con l'altezza z, la legge:

$\frac{\nu}{\nu_o} = \exp\left[-\frac{\Delta E}{KT}\right]$ che traduce la legge di ripartizione statistica di Boltzmann, dando per un insieme di molecole in equilibrio termico un numero relativo di esse che hanno un eccesso, o un difetto, ΔE di energia in rapporto all'energia media di agitazione KT alla temperatura considerata. Data quindi una certa KT e una certa densità numerica ν_o a z_o, le particelle si distribuiranno alle quote $z > z_o$ [e quindi acquisteranno un incremento $\Delta E = mg(z - z_o)$ di energia potenziale] con una probabilità che decresce con ΔE e aumenta con KT.

Se KT aumenta, perché aumenta *T*, si ha che il rapporto $\frac{\nu}{\nu_o}$ conserva il proprio valore se ΔE aumenta in modo proporzionale. Ciò significa che, all'aumentare di *T*, aumenta la quota a cui giungono le particelle, assicurando così alle quote più alte la stessa densità numerica di particelle e quindi la stessa pressione. E' un altro modo di vedere come la pressione di una massa d'aria più calda diminuisca meno rapidamente di quanto non faccia in una massa d'aria più fredda.

Fig. (3.11)



$KT_1 > KT_2$