

CAPITOLO 4

TERMODINAMICA DELL'ATMOSFERA

4.1 – Introduzione ¹.

Dopo aver considerato il modello statico dell'atmosfera, nel quale abbiamo confinato considerazioni esprimenti unicamente gli equilibri delle forze in condizioni di quiete e di moto uniforme e costante e le relazioni cosiddette di stato, escludendo quelle di carattere termodinamico, prendiamo in esame il modello più aderente alla realtà, di un'atmosfera i cui elementi non sono in quiete, bensì in moto, soprattutto verticale, sia relativamente alla superficie terrestre, sia relativamente l'uno all'altro.

Per facilitare la transizione fra la Fisica tradizionale, che privilegia lo studio dei sistemi di equilibrio, e la Fisica dell'atmosfera, che affronta le medesime tipologie di problemi relativi a sistemi che non sono di equilibrio (almeno dal punto di vista meccanico), questo Capitolo sarà preceduto da alcuni paragrafi dedicati alla termodinamica di equilibrio e al riesame di definizioni, concetti, teoremi ad essa pertinenti.

Si vedrà che la termodinamica atmosferica non rappresenta una “rottura” con la termodinamica della Fisica tradizionale, ma al contrario costituisce una interessante sua generalizzazione nel pieno rispetto dei principi e dei teoremi fondamentali della Fisica.

¹ Questo Capitolo contiene parti e concetti che sono una libera trasposizione dai testi di “Fisica Generale” di Carlo Castagnoli, Casa Editrice Levrotto e Bella, Torino 1984, e di Sergio Rosati, Casa Editrice Ambrosiana, Milano 1978

4.1.1a - Convenzioni di segno.

Prima di affrontare il primo principio della Termodinamica nella sua versione più idonea a rappresentare i fenomeni che avvengono in atmosfera, è importante stabilire la convenzione di segno che viene adottata per le grandezze fisiche cosiddette “di transito”, ossia per quelle grandezze che vengono scambiate fra due corpi fluidi, separati fra di loro da una superficie materiale (ossia costituita da particelle fluide “comuni” ai due corpi) scelti, ad esempio, a rappresentare un “Sistema” - detto anche “particella atmosferica” - e un altro corpo fluido, detto “Ambiente”, che contiene al suo interno il “Sistema” e che può rappresentare l’intera atmosfera o una regione sufficientemente ampia di essa.

Una definizione più generale di “grandezza di transito” si applica a tutte quelle grandezze fisiche (come il calore o il lavoro) che vengono trasferite da una parte all’altra di un Sistema termodinamico, o da un “Sistema” termodinamico all’ “Ambiente” - e viceversa - senza venire “depositate” nella sostanza materiale costituente il Sistema o l’Ambiente.

“Sistema” e “Ambiente” rappresentano due entità di una ripartizione ideale dello spazio occupato da un fluido. Nel caso della Terra, o di un qualsiasi altro pianeta nel quale sia presente un’atmosfera, l’ “Ambiente” è generalmente una porzione abbastanza vasta di atmosfera e il “Sistema” è una particella abbastanza piccola, al limite infinitesima, appartenente all’ “Ambiente”, che é inizialmente in equilibrio con quest’ultimo e da esso separata da una superficie chiusa, ideale e arbitraria, che delimita il volume che la contiene.

Tale superficie ideale, che delimita il volume di fluido che costituisce il “Sistema”, deve essere pensata come un luogo geometrico sul quale risiedono, senza mai abbandonarlo, le particelle che chiameremo di “frontiera”, ossia le particelle materiali appartenenti al fluido interno, le quali non si scambiano con quelle del fluido esterno, nonostante le deformazioni che la superficie di confine può subire durante il moto.

Per questa ragione si parla di “superficie materiale” delimitante un “volume Lagrangiano” in movimento. Con tale denominazione, ci si riferisce a un volume di fluido, delimitato da una superficie chiusa che non viene attraversata da particelle, né dall’interno verso l’ambiente né viceversa, qualunque sia la deformazione che può subire durante il moto.

E’ inteso, inoltre, che questo particolare volume abbia anche una sua “individualità di comportamento”, nel senso che esso può spostarsi (anche deformandosi ma senza perdere o acquistare materia) rispetto alla posizione relativa che occupava a un certo istante di tempo nell’ambiente esterno, raggiungendone un’altra ove i parametri fluidodinamici esterni hanno valori diversi, per cui esso non è più in equilibrio con l’ambiente che lo circonda. Per questo motivo, importantissimo, si è detto poco fa ***“inizialmente in equilibrio”***.

Mentre nella posizione iniziale di equilibrio il sistema non risentiva di forze esterne che lo facessero muovere dalla sua posizione di equilibrio iniziale, dal momento che le sue grandezze di stato (p, T e ρ) avevano gli stessi valori di quelle dell’ambiente nelle immediate vicinanze, nella nuova posizione che esso raggiunge (e che verosimilmente non sarà più di equilibrio), il sistema risentirà di azioni di forze esterne che ne perturberanno lo stato, magari esaltando lo squilibrio e quindi favorendo un ulteriore allontanamento.

Il Primo Principio della Termodinamica, scritto nella sua forma più generale:

$$dQ = dL + dU$$

rappresenta il principio della conservazione dell'energia fra un Sistema e l'Ambiente nel quale esso si trova. In termini più specifici, il Primo Principio stabilisce che se l'Ambiente esterno fornisce, o sottrae, al Sistema una certa quantità di calore dQ , il Sistema compirà un certo lavoro esterno dL contro le forze di pressione dell'Ambiente, o riceverà dall'Ambiente una certa quantità di energia meccanica sotto forma di lavoro dL e, nello stesso tempo, la sua energia interna $U = mC_vT$ varierà della quantità $dU = mC_vdT$, corrispondente allo scompensamento fra dL e dQ scambiati, avendo indicato con C_v il calore specifico a volume costante e con m la massa del Sistema.

Va notato che la massa m compare solo nei termini U e dU .

Ciò non è solo dovuto all'esigenza di esprimere anche questi termini in Joule, e cioè in una forma dimensionalmente omogenea con le unità di misura di dQ e dL , ma indica anche, se non soprattutto, che l'Energia Interna non è una grandezza "transitoria", bensì è una forma di energia che viene depositata e contenuta nella materia, in questo caso la massa del Sistema. In termini più rigorosi, la Fisica dice che questa forma di energia è una Funzione di Stato, intendendo con ciò che essa dipende solo dallo Stato del Sistema e non dal particolare percorso effettuato dalla trasformazione termodinamica per passare da uno Stato all'altro).

Possiamo però vedere nell'equazione del Primo Principio della Termodinamica anche un altro significato, che discende dalla proprietà di un Sistema di scambiare forme varie di energia meccanica e termica con l'Ambiente.

In questa proprietà è contenuta la possibilità, per un Sistema che sia stato spostato da una sua posizione di equilibrio nell'Ambiente esterno ad un'altra

che non è più di equilibrio, di riportarsi verso una nuova condizione di equilibrio attraverso scambi di energia termica e meccanica con l'Ambiente. Quest'ultima, ovvia, considerazione, ci riporta al problema ricordato all'inizio di questo paragrafo, ossia quello di attribuire un segno algebrico alle energie transitorie scambiate. Fra le varie convenzioni adottate, scegliamo quella della Fisica, che è opposta a quella della Chimica e che si può così sintetizzare [vedi fig. (4.0)]:

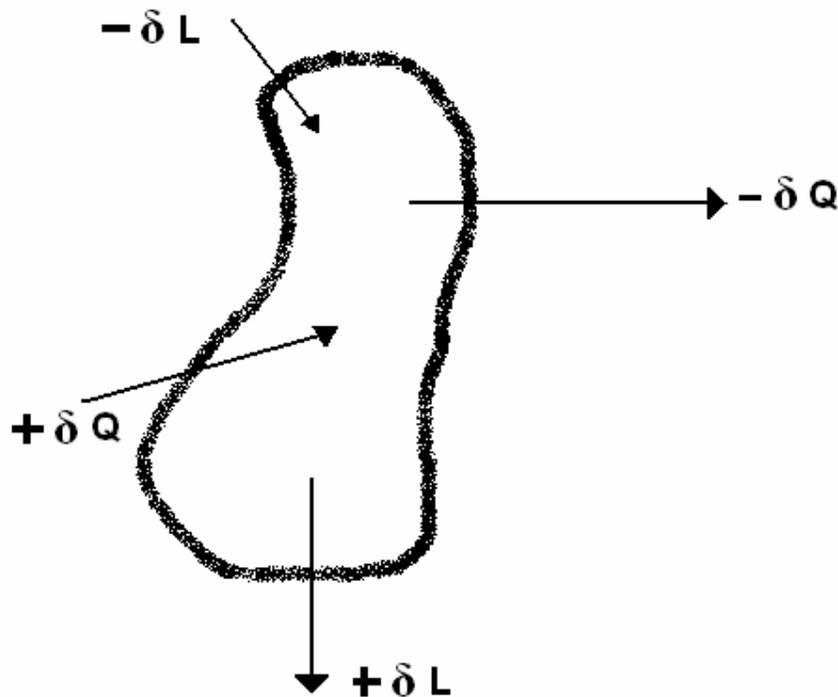


Fig. (4.0)

- a)- segno negativo davanti all'energia termica scambiata, ossia $[-dQ]$, indica energia termicamente ceduta (ovvero persa) dal sistema all'ambiente;
- b)- segno negativo davanti all'energia meccanica scambiata, ossia $[-dL]$, indica energia meccanica fornita (ovvero persa) dall'Ambiente al Sistema sotto forma di lavoro esterno (cioè con contrazione del Sistema). Tale

fornitura di lavoro esterno al Sistema da parte dell'Ambiente si trova rappresentata, in alcuni Testi, dall'espressione :

$$W = - p\Delta V = - p [V_2 - V_1] = p[V_1 - V_2]$$

dove V_1 e V_2 rappresentano rispettivamente il volume iniziale e quello finale. Se $V_2 > V_1$ (ossia si ha espansione e quindi lavoro esterno del Sistema), il segno negativo nell'ultima equazione davanti a $p\Delta V$ ha il chiaro significato di lavoro esterno fornito al Sistema. Se invece usiamo il simbolo W , diciamo che il suo segno positivo indica la stessa cosa, essendo $W = - p\Delta V$.

Infatti, se $V_2 > V_1$, $W = - p\Delta V = - p [V_2 - V_1] < 0$ e questo significa per l'appunto che $dL = p\Delta V = -W > 0$, come deve essere, essendovi un'espansione del Sistema.

Scrivendo infine il Primo Principio della Termodinamica nella forma :

$$dU = dQ - dL = dQ - (+ dL)$$

vediamo un nuovo significato attribuibile alla variazione dell'energia interna dU . Essa rappresenta quella parte di energia termica che è stata ceduta dall'Ambiente al Sistema e da questo trattenuta sotto varie forme al suo interno, ma non ceduta completamente all'Ambiente sotto forma di lavoro esterno. Se, invece, l'energia meccanica (o lavoro esterno) è stata ceduta all'Ambiente nella misura massima possibile (ossia $+ \delta L = \delta Q$), allora si avrà $dU = 0$.

Ovviamente, tutto quanto detto finora vale nell'ambito della convenzione adottata dalla Fisica, mentre altre convenzioni avrebbero l'effetto di rovesciare tutti i segni, mantenendo inalterato il significato dei bilanci energetici.

4-1.1b - Definizioni.

Equilibrio termico fra due corpi:

due corpi si dicono all'equilibrio termico quando sono alla medesima temperatura

Vale la proprietà, che è alla base dell'enunciato del cosiddetto Principio zero della termodinamica, per la quale due corpi posti in contatto raggiungono dopo un certo tempo l'equilibrio termico.

La temperatura di equilibrio T_{eq} tra i due corpi costituiti dalla stessa sostanza è:

la media pesata delle temperature dei due corpi, e i relativi pesi sono i rapporti fra le masse dei due corpi e la massa complessiva

$$T_{EQ} = \frac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) T_1 + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) T_2$$

Scambi di calore:

se più corpi, messi in contatto, raggiungono l'equilibrio termico, la somma delle quantità di calore scambiate fra di loro è nulla.

(essendo, per convenzione, il segno del calore scambiato positivo quando è assorbito e negativo quando è ceduto dal sistema).

Sistema termodinamico:

corpo, o insieme di corpi, ciascuno dei quali ha una composizione fisica ben definita.

Ambiente esterno:

spazio “materiale” o vuoto, che circonda il Sistema e con cui il sistema scambia calore e lavoro.

Nella Termodinamica tradizionale e “di laboratorio”, ove il Sistema viene confinato spazialmente mediante pareti rigide o flessibili, diabatiche o adiabatiche, l’Ambiente esterno puo’ essere rappresentato anche da termostati o da sorgenti di energia elettromagnetica.

Come si e’ gia’ visto nella “Statica”, e come constateremo anche nei successivi paragrafi, in atmosfera non è invece materialmente possibile racchiudere con pareti materiali ben identificate il volume d’aria che rappresenta il Sistema, ossia l’atmosfera non è “compartimentabile”, se non idealmente con una superficie chiusa composta essa stessa da molecole del fluido (verrà per questo chiamata “superficie materiale”), separante la particella d’aria che funge da Sistema da tutta l’atmosfera circostante, che diviene l’Ambiente. Il volume e la superficie chiusa che, in atmosfera, definiscono il Sistema cambiano continuamente forma e dimensioni in funzione dei moti dell’aria, senza che vi siano scambi di particelle attraverso la superficie chiusa di separazione. Si stabilisce in tal modo una stretta relazione fra i campi cinematici dell’atmosfera (campo di velocità, di accelerazione, di gradiente, di divergenza, di rotore, ecc.) e le trasformazioni termodinamiche dell’aria “forzate” dalle variazioni di tali campi.

4-1.1c - Trasformazioni termodinamiche.

Allorché abbiamo introdotto l'ipotesi di continuità per il fluido atmosferico (proprietà che si assume valida per tutti i fluidi studiati dal punto di vista tradizionale, ossia macroscopico), abbiamo sottinteso che si prescindeva dalla struttura puntiforme delle molecole e degli atomi e dalla loro posizione, velocità, forze intermolecolari e massa e che si procedeva a descriverne il comportamento rinunciando alla conoscenza del moto di ogni molecola, accedendo invece ad informazioni riferite ad un grande numero di molecole, sostituendo cioè ai valori cinematici e dinamici individuali prima ricordati delle informazioni statistiche riferite a un grande numero di molecole.

In tal modo, facendo astrazione dalla struttura molecolare, lo stato di un fluido viene caratterizzato con un certo numero di nuove proprietà macroscopiche (o termodinamiche) facilmente misurabili, dalle quali è possibile ricavare tutte le informazioni che di solito interessano nello studio del comportamento di un corpo materiale (nel caso presente, un fluido). Le condizioni di un certo sistema fluido restano così individuate da un certo numero di nuove variabili, quali il volume, la temperatura e la pressione in ogni punto del corpo.

Ciò può essere visto come una sorta di conversione di proprietà individuali delle singole molecole - supposte rappresentabili da punti materiali, dotati ciascuno di una propria massa e velocità individuali - in nuove proprietà di insieme, quali T , p e V , "spalmate" in ogni punto dello *spazio* occupato dal sistema. Ciò corrisponde anche a dire che le trasformazioni termodinamiche riguardano i cambiamenti di variabili continue definite a scala macroscopica, cioè prescindendo dalla struttura molecolare del fluido.

Nello studio delle trasformazioni termodinamiche è fondamentale partire dai concetti di stati di equilibrio.

Ricordiamo innanzitutto che si considerano, in Fisica, tre stati principali di equilibrio (meccanico, termico e chimico), definiti come segue:

- 1 - equilibrio meccanico, che si ha quando non esistono forze non equilibrate né all'interno del sistema né agenti dall'esterno sul sistema;
- 2 - equilibrio termico, che si ha quando tutte le parti del sistema, che possono scambiare calore fra di loro, hanno la *stessa* temperatura, la quale può essere anche la temperatura dell'ambiente esterno se le pareti del contenitore permettono scambi di calore fra il sistema e l'esterno;
- 3 - equilibrio chimico, che si ha se non si verificano reazioni chimiche né spostamenti di materia (soluzioni, diffusioni, moti convettivi) all'interno del sistema.

Un sistema termodinamico è in uno stato di equilibrio se soddisfa le condizioni poste da ciascuno dei tre tipi di equilibrio appena citati che, escludendo la presenza di gradienti di proprietà meccaniche, termiche e chimiche [gradienti che darebbero rispettivamente luogo a forze non in equilibrio, a scambi di calore e a reazioni chimiche o spostamenti di materia all'interno del sistema], impongono automaticamente che le variabili di stato di un sistema di equilibrio abbiano il medesimo valore in ciascun punto del sistema.

Queste ultime, all'equilibrio termodinamico, non sono tutte indipendenti fra loro (si ricordi, ad esempio, l'equazione di stato per i gas introdotta e studiata

nel Capitolo 3, che ha mostrato che lo stato di equilibrio di un sistema fluido omogeneo resta fissato da $[p, T \text{ e } V]$ ma che queste tre variabili di stato non sono completamente indipendenti l'una dall'altra, bensì sono legate fra di loro, per cui il valore di una qualunque delle tre è determinato se si conoscono i valori delle altre due).

In altre parole, lo stato di equilibrio del sistema fluido considerato è determinato da due sole variabili indipendenti.

Ciò permette quindi di concludere che uno “stato di equilibrio” di un sistema può essere rappresentato da un punto in uno spazio 3-D “non geometrico” $[p, V, T]$ o, tenuto conto della legge dei gas, in uno dei tre spazi 2-D, che sono rispettivamente $[p, T]$ o $[p, V]$ o $[V, T]$.

4-1.1d - Trasformazioni cicliche.

Allorquando, con il passare del tempo, cambiano i valori di alcune delle variabili che caratterizzano lo stato di un sistema, si dice che il sistema subisce una trasformazione.

Se, alla fine della trasformazione, il sistema si ritrova in uno stato di equilibrio identico a quello iniziale (cioè tutte le variabili del sistema hanno nuovamente i valori iniziali) si dice che il sistema ha compiuto una trasformazione ciclica o un ciclo.

4-1.1e - Trasformazioni reversibili e irreversibili.

Può accadere, nel corso di una trasformazione termodinamica, che una delle variabili che caratterizzano lo stato del sistema non sia più definibile. L'esempio più semplice e intuitivo di ciò è dato dalla pressione: in caso di brusca compressione di un gas, non ha più senso parlare di "pressione" del gas, in quanto quest'ultima può variare da un punto ad un altro del sistema (diventando in alcuni casi anche dipendente dalla direzione), creando in tal modo gradienti di pressione, ossia condizioni di forze non equilibrate all'interno del sistema, in contrasto con la condizione n°1 di equilibrio meccanico definita precedentemente (paragrafo 4.1.1c).

Abbiamo detto prima che le trasformazioni termodinamiche vengono definite, e seguite, da un punto di vista macroscopico. Esse, pertanto, devono avere ad ogni istante valori ben precisi di tutte le variabili macroscopiche che ne definiscono lo stato. Tali valori devono inoltre essere infinitamente vicini ai

valori che corrispondono a stati di equilibrio, per permettere l'uso dell'equazione di stato.

Generalizzando quanto detto prima a proposito della definizione di “stato di equilibrio”, aggiungiamo ora le seguenti nuove condizioni a cui lo stato di un sistema termodinamico deve soddisfare per poter essere considerato infinitamente vicino a uno stato di equilibrio:

- a) - le cause che producono la trasformazione devono essere infinitamente piccole;
- b) - la trasformazione deve essere infinitamente lenta.

Una trasformazione che soddisfi le condizioni a) e b) e per la quale sia possibile invertirne il senso cambiando di infinitamente poco i fattori che la determinano [condizione c)], è detta *trasformazione reversibile*.

Da quanto precede, si evince che le trasformazioni reali possono approssimare le condizioni di trasformazioni reversibili ma non raggiungerle.

Le cause di ciò possono essere molteplici, ma una di esse, la forza d'attrito, che è una forza dissipativa e resistente, è la principale responsabile di tale impossibilità.

Essendo essa sempre presente in tutti i processi fisici, compresi quelli atmosferici, ogni trasformazione reale si verifica sempre per una differenza, piccola quanto si vuole ma non nulla, fra le forze attive (motrici) e quelle resistenti (attrito), violando così la condizione n°1 di equilibrio meccanico e le condizioni a) e b) che determinano l'approssimazione a uno stato di equilibrio.

Inoltre, la proprietà “resistente” della forza d'attrito fa sì che essa sia sempre orientata nel verso opposto a quello delle forze attive. Riferendoci

all'atmosfera ricordiamo che essa, come ogni gas reale, presenta attrito interno e con le superfici (suolo, mare, ecc. con cui viene a trovarsi a contatto): invertendo le cause esterne che provocano la trasformazione il gas non percorre necessariamente la trasformazione inverse [violando quindi la terza condizione c)], perché gli effetti delle forze d'attrito non si invertono invertendo il verso della trasformazione.

4-1.1f - Rappresentazione grafica delle trasformazioni.

Come si è appena visto, tutte le trasformazioni reali sono irreversibili, tuttavia alcune di esse si svolgono in maniera sufficientemente lenta e attraverso stati abbastanza bene caratterizzati da valori definiti delle variabili macroscopiche, così da poterle ritenere “*praticamente reversibili*”. Per tali trasformazioni che, a tutti gli effetti, possono essere considerate “*reversibili*” in quanto le variabili microscopiche cambiano con regolarità al passare del tempo, possiamo scrivere che la trasformazione di un sistema caratterizzato da un generico stato di equilibrio definito dal volume V , dalla pressione p e dalla temperatura T , resta determinata dalle funzioni del tempo $V = V(t)$, $p = p(t)$ e $T = T(t)$.

L'insieme di queste tre funzioni costituisce il sistema delle equazioni parametriche della trasformazione che, fra l'altro, permettono di ottenere utili rappresentazioni grafiche - ad esempio nel piano $[V,p]$ di Clapeyron - della trasformazione che fa passare un Sistema Termodinamico da un certo stato di equilibrio A ad un certo altro stato di equilibrio B lungo una traiettoria rappresentata da una linea curva continua.

Se la trasformazione è reversibile, tutti gli stati intermedi fra A e B attraversati dal sistema sono stati di equilibrio, mentre se la trasformazione è irreversibile gli stati intermedi non sono generalmente di equilibrio e non possono essere caratterizzati con valori definiti delle grandezze macroscopiche (per questa ragione, le traiettorie delle trasformazioni irreversibili non sono più indicate da linee curve continue, bensì da successioni di piccoli trattini).

Le trasformazioni termodinamiche più comuni sono quelle a volume costante (isocore), a pressione costante (isobare, o isobariche), a temperatura costante (isoterme), a scambio di calore nullo (adiabatiche).

In atmosfera, le trasformazioni più comunemente osservate sono le isobariche e le adiabatiche.

4-1.1g - I principi di conservazione della Meccanica e della Termodinamica tradizionale.

Come nei vari sistemi della Meccanica, così anche nei sistemi atmosferici i principi e i teoremi di conservazione dell'energia rivestono un ruolo primario nello studio del moto dei corpi, sia da un punto di vista fondamentale sia sotto il profilo della loro utilità pratica .

In Meccanica l'energia di un corpo è intesa come la capacità da esso posseduta di compiere lavoro, capacità che può derivare sia dal fatto che il corpo è in movimento rispetto al sistema di riferimento considerato (ossia possiede energia cinetica) sia dalla particolare posizione che esso occupa nello spazio in cui hanno sede forze conservative delle cui azioni esso risente (ossia possiede energia potenziale).

Dal punto di vista puramente meccanico, il teorema di conservazione dell'energia ci dice che , in un campo di forze conservativo, l'energia

meccanica (cioè la somma dell'energia cinetica e di quella potenziale) di un corpo in movimento (ossia non *in quiete*) rimane costante nel tempo.

Il teorema appena citato si applica solo parzialmente all'atmosfera, dal momento che in essa non agiscono solo forze conservative, ma anche (come abbiamo già visto) forze dissipative, la principale delle quali è quella dovuta agli attriti fluidi (laminari e turbolenti) dell'aria. Entriamo così in un campo di fenomeni che non possono essere compresi pienamente nell'ambito della Meccanica: infatti, pensando agli attriti fluidi, il loro effetto più diretto su un corpo che si muove nell'aria è quello di farne diminuire la velocità, ossia in ultima analisi, non conservarne l'energia meccanica.

Si perviene così a una nuova, più generale, fenomenologia fisica, la Termodinamica, che sappiamo potersi esprimere nel modo seguente:

Ogni volta che non si ha conservazione dell'energia meccanica, si osserva la produzione o la scomparsa di altre forme di energia, (termica, luminosa, elettrica, ecc.).

Tipica di questa situazione è, in atmosfera, la produzione o la scomparsa di una certa quantità di calore.

Riassumendo, possiamo dire che, nei fenomeni puramente meccanici, l'energia meccanica si conserva. Ricordando poi l'insegnamento della *Calorimetria*, possiamo analogamente dire che, nei fenomeni puramente termici, si conserva la quantità complessiva di calore. Nei fenomeni, infine, in cui compaiono contemporaneamente energie meccaniche e energie termiche (quantità di calore), dobbiamo invece dire che le due grandezze non si conservano *separatamente*.

Non dimentichiamo però, a questo punto, che la Fisica considera l'energia meccanica e il calore come due aspetti diversi dell'energia (*principio di equivalenza*), il che permette di ottenere una legge di conservazione dell'energia di validità generale, che porta alla formulazione del ben noto ***Primo principio della termodinamica.***

Infatti, il principio di equivalenza, che deve coincidere con quello di conservazione dell'energia meccanica per i fenomeni puramente meccanici e con quello di conservazione della quantità di calore per i fenomeni puramente termici, altro non è che il Primo principio della Termodinamica per una trasformazione *ciclica*² reale, per la quale è stato osservato *sperimentalmente* che la quantità di calore Q e il lavoro L scambiati dal sistema con l'ambiente esterno stanno fra di loro in un rapporto costante J , detto equivalente meccanico della caloria.

Tale grandezza ha il carattere di una costante universale e ogni quantità di calore Q può ottenersi dalla trasformazione completa in calore di una energia meccanica L .

Il calore Q è di conseguenza una forma di energia che può essere misurata con le stesse unità di misura usate per l'energia meccanica, e viceversa.

Se la quantità di calore Q viene espressa in Joule (o se il lavoro viene misurato in calorie), la costante universale J assume il valore adimensionale unitario (ossia, $J = 1$), il che porta all'espressione del principio di equivalenza delle trasformazioni cicliche data dall'uguaglianza $L = Q$.

2

Viene considerata una trasformazione *ciclica* per il vantaggio che essa offre di far coincidere gli stati iniziale e finale (di equilibrio) della trasformazione, per cui non si ha immagazzinamento di energia

4-1.1h - Il primo principio della Termodinamica per le trasformazioni cicliche.

Arriveremo alla formulazione del primo principio della Termodinamica attraverso l'analisi del cosiddetto "*Principio dello stato iniziale e dello stato finale*".

Come si è appena visto, per una trasformazione ciclica di un sistema termodinamico vale la relazione $L = Q$.

Tale relazione può essere generalizzata in modo da permettere di ottenere una legge di conservazione più generale, applicabile anche alle trasformazioni non cicliche, che sono quelle prevalenti nella realtà, soprattutto in atmosfera.

Consideriamo, per semplicità, un sistema di massa nota, il cui stato è caratterizzato, come sappiamo, dalle variabili p , V e T .

I risultati che otterremo saranno estrapolabili a un sistema termodinamico qualunque.

Siano A e B due stati di equilibrio qualsiasi nel piano di Clapeyron (V, p) .

Il passaggio da A a B può compiersi con processi sia reversibili sia irreversibili, seguendo percorsi diversi. Immaginiamo di scegliere due percorsi, entrambi reversibili, che identificheremo rispettivamente con gli indici " β " (da A a B) e " d " (da B ad A) e un terzo percorso, (da B a A), irreversibile, identificato con l'indice " ξ ". E' immediato vedere come le due trasformazioni reversibili " β " e " d " costituiscano, nel loro insieme, una trasformazione ciclica reversibile, mentre le due trasformazioni " ξ " (irreversibile) e " β " (reversibile) costituiscano invece, nel loro insieme, una trasformazione ciclica "mista" – [Fig. (4.1)]

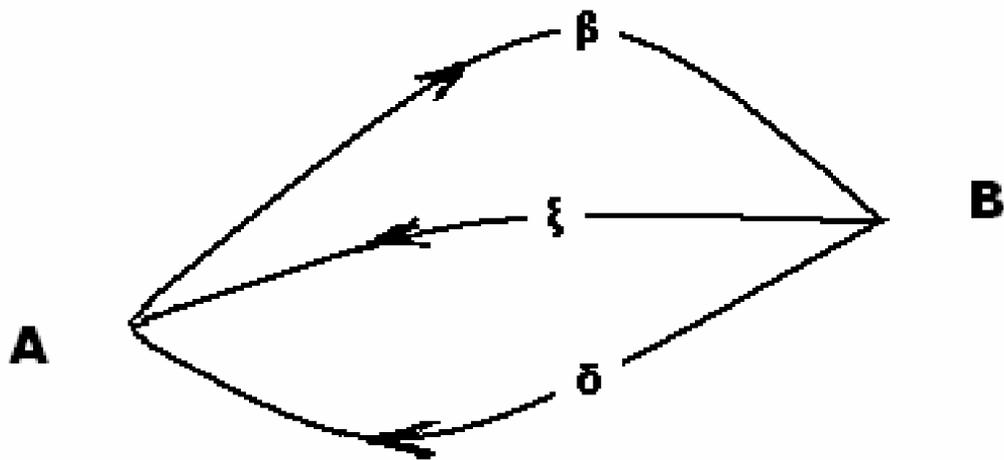


Fig. (4.1)

Indichiamo con Q_{β} , Q_d e Q_{ξ} e con L_{β} , L_d e L_{ξ} le quantità di calore e i lavori in gioco nelle trasformazioni “ β ”, “ d ” e “ ξ ”: la quantità di calore scambiata nella trasformazione ciclica reversibile [“ β ” + “ d ”] sarà $Q_{\beta} + Q_d$ e il lavoro nella medesima trasformazione sarà $L_{\beta} + L_d$.

Per il principio dell’equivalenza ($Q = L$), sarà:

$$Q_{\beta} - L_{\beta} = + Q_d - L_d \quad (A)$$

Analogamente, per la trasformazione ciclica mista [“ d ” + “ ξ ”], si avrà:

$$Q_d - L_d = Q_{\xi} - L_{\xi} \quad (B)$$

Da queste ultime due equazioni (A) e (B), si ottiene:

$$Q^{“\beta”} - L^{“\beta”} = Q^{“\xi”} - L^{“\xi”}$$

ossia il risultato che, data l'arbitrarietà delle trasformazioni “ d ” e “ ξ ” (reversibili e irreversibili), ci dice che quando un sistema termodinamico passa da uno stato di equilibrio A ad un altro stato di equilibrio B la quantità $Q - L$ è indipendente dalla particolare trasformazione seguita ma dipende solo dagli stati A e B .

Questa formulazione classica del *Primo principio della termodinamica* ha però la limitazione di essere ristretta a considerare la conservazione dell'energia per trasformazioni fra stati di equilibrio, limitazione imposta dalla sovrarmenonata condizione che il calore sia uguale al lavoro nelle trasformazioni cicliche.

In atmosfera sono invece di gran lunga più importanti le trasformazioni non cicliche, per cui dobbiamo generalizzare il Primo principio della termodinamica.

Vedremo nei paragrafi che seguono come questo può essere fatto. Per ora, iniziamo a definire i processi isentropici

4-2 - I processi isentropici.

Sono detti “isentropici” i processi termodinamici che effettuano trasformazioni adiabatiche reversibili con attriti nulli o trascurabili.

Per la loro descrizione, conviene ricordare anche, come vedremo più avanti, la definizione di “entalpia”, che è la funzione di stato associata alle trasformazioni termodinamiche non adiabatiche a pressione costante.

Queste trasformazioni sono particolarmente importanti in atmosfera, ove le forze di pressione esterne che agiscono su una particella considerata come “sistema” si mantengono costanti su intervalli di tempo che sono lunghi rispetto alla durata tipica di un esperimento.

Nell'ipotesi di una trasformazione a $p = \text{cost}$ fra uno stato iniziale (1) e uno stato finale (2), nel quale il sistema cambi il proprio volume dal valore $V(1)$ al valore $V(2)$, per cui si possa scrivere che $V(2) - V(1) = \Delta V$, esso compirà il lavoro $\Delta L = p \Delta V$, senza ovviamente cambiare la sua pressione in virtù dell'ipotesi, fatta precedentemente, di riaggiustamento continuo della pressione interna del sistema con quella esterna dell'ambiente. Poiché, nel caso in questione, la pressione esterna non è cambiata, neppure quella interna è cambiata.

Ci si può pertanto porre la domanda: come può, il sistema, compiere un lavoro esterno, ossia dilatarsi, se il campo delle forze esterne di pressione dell'ambiente rimane costante?

La risposta la dà la Termodinamica classica, dimostrando che il sistema si dilata - senza che la pressione cambi - ricevendo dall'ambiente una certa quantità di calore dq che, in questo particolare caso, è un differenziale esatto, ossia una funzione di stato, chiamata Entalpia.

Infatti, se $p = \text{cost}$, sarà ovviamente

$$pdV = d(pV).$$

Scrivendo che, per la nostra trasformazione finita a pressione costante fra gli stati $V(1)$ e $V(2)$, deve essere $p \Delta V = \Delta (pV)$, e trasformando quindi questa relazione da una forma che fa apparire differenze finite in una relazione fra termini infinitesimi, per cui $pdV = d(pV)$, l'espressione del Primo Principio della Termodinamica diviene:

$$dQ = dL + dU = d(pV) + dU = d(pV+U) = dH$$

dove dH è il differenziale della funzione $H = pV + U$, che prende il nome di Entalpia.

Si vede così che se questo tipo di trasformazione è finita, l'energia termica Δq si trasforma tutta in entalpia ΔH .

Ricordiamo allora il caso a noi più familiare delle trasformazioni isocore (a volume costante), per le quali $pdV = 0$, per cui il I Principio dà:

$$dQ = dU$$

da cui, integrando fra due stati (1) e (2), si ottiene:

$$\Delta Q = U(2) - U(1) = \Delta U$$

Il significato di questa ultima relazione è il seguente: nelle trasformazioni isocore senza lavoro esterno, la quantità ΔQ di calore scambiato è un differenziale esatto, essendo uguale a $U(2) - U(1)$, ossia dipendente solo dai valori estremali della funzione U , che diviene pertanto una funzione di stato, chiamata Energia Interna, le cui variazioni risultano essere misurabili con semplici misure di calore a volume costante.

Ritornando all'Entalpia, ritroviamo un risultato analogo a quello ricordato per l'Energia Interna, ossia: nelle trasformazioni isobare, la quantità ΔQ di calore scambiato è un differenziale esatto, essendo uguale a $H(2) - H(1)$, ossia dipendendo solo dai valori estremali della funzione H , che diviene pertanto una funzione di stato, chiamata Entalpia, le cui variazioni risultano essere misurabili con semplici misure di calore a pressione costante.

Ciò che abbiamo imparato da questi due fondamentali richiami di Termodinamica è che nelle trasformazioni isocore e isobare le quantità di

calore scambiato fra sistema e ambiente sono DIFFERENZIALI ESATTI: nel secondo caso, che è quello che a noi interessa ora, il calore scambiato in una trasformazione a pressione costante è dato dalla variazione della funzione di stato “entalpia”.

E' appunto questo calore scambiato che permette al sistema di espandersi e fare lavoro esterno a pressione costante contro le forze di pressione dell'ambiente, anch'esse costanti.

Rimandiamo ai Testi di Fisica Generale la trattazione più completa e rigorosa di questi argomenti, basata sulle relazioni fra i calori specifici e l'energia interna attraverso la Relazione generalizzata di Mayer.

4-3 - Le trasformazioni isentropiche.

Partendo dall' *equazione di stato* riferita all'unità di massa, ossia adottando il volume specifico a in luogo del volume V :

$$pa = R_d T \quad (4.1)$$

si ricava:

$$p = R_d T/a \quad (4.1a)$$

mentre, dal *I Principio della Termodinamica* per unità di massa:

$$du = dq - pda = dq + dw , \quad (4.2)$$

dove dw - in luogo di dW - indica ora il lavoro esterno per unità di massa ceduto dall'*ambiente* al *sistema* (ossia $\partial w = \frac{\partial W}{\partial m}$), otteniamo, per una trasformazione adiabatica ($dq = 0$) e reversibile (priva di attriti), ossia isentropica, che la (4.2) si trasformi in:

$$du = -pda \quad (4.3)$$

Essendo però anche:

$$du = C_v dT \quad (4.3a)$$

avremo:

$$C_v dT = -pda \quad (4.4)$$

Applicando la (4.1a), la (4.4) diviene:

$$C_v dT/T + R_d da/a = 0 \quad (4.5)$$

Integrando la (4.5), otteniamo (essendo C_v e R_d costanti) :

$$C_v \log T + R_d \log a = \text{cost} \quad (4.6)$$

ossia :

$$\log [(T)^{C_v} (a)^{R_d}] = \text{cost} \quad (4.7)$$

ovvero ancora:

$$(T)^{C_v} (a)^{R_d} = \text{cost} \quad (4.8)$$

Essendo però:

$$c_p - c_v = R_d \quad \text{e} \quad c_p / c_v = (c_v + R_d) / c_v = \gamma \quad (4.9)$$

da cui ancora:

$$R_d / c_v = \gamma - 1 \quad (4.10)$$

ossia:

$$R_d = c_v (\gamma - 1)$$

per cui la (4.8) diviene:

$$(T)^{C_v} (a)^{R_d} = (T)^{C_v} (a)^{C_v (\gamma - 1)} = \text{cost} \rightarrow T a^{(\gamma - 1)} = \text{cost} \quad (4.11)$$

essendo $c_v = \text{cost}$.

Facendo la sostituzione (nella 4.11):

$$T = pa / R_d$$

si ottiene:

$$T a^{(\gamma - 1)} = pa / R_d \cdot a^{(\gamma - 1)} = \text{cost} \rightarrow pa^\gamma = \text{cost} \quad (4.12)$$

avendo ancora una volta applicato la condizione $R_d = \text{cost}$.

La relazione (4.12):

$$p a^\gamma = p/\rho^\gamma = \text{cost} \quad (4.12)$$

é anche conosciuta come *Legge di Laplace* delle trasformazioni isentropiche.

La (4.12), ricordando la (4.11) e con l'ulteriore sostituzione:

$$a = R_d T/p \quad (4.13)$$

ci dà l'espressione definitiva della legge delle trasformazioni isentropiche:

$$\boxed{T^\gamma/p^{\gamma-1} = \text{cost}}$$

(4.14)

Va notato che le equazioni (4.12) e (4.14) mantengono la loro validità se, anziché la massa unitaria come fattore di normalizzazione, si usa una massa qualsiasi.

In una trasformazione isentropica di espansione fra uno stato (1) e uno stato (2), si ha così:

$$T_2/T_1 = [a_1/a_2]^{(\gamma-1)} = [p_2/p_1]^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (4.15)$$

e:

$$\rho_1/\rho_2 = (p_1/p_2)^{1/\gamma} \quad (4.16)$$

quest'ultima relazione essendo stata ottenuta applicando la (4.12) nella forma $p/\rho^\gamma = \text{cost}$, ovvero $\rho = p^{1/\gamma}$.

Riscrivendo la relazione (4.12):

$$p a^\gamma = p/\rho^\gamma = \text{cost} = k \quad (4.12)$$

nella forma equivalente:

$$p = k \rho^\gamma, \quad (4.17)$$

ovvero: $\rho^\gamma = (1/k) p = k' p \quad (4.18)$

ossia ancora: $\rho = (k' p)^{1/\gamma} \quad (4.19)$

e scrivendo il primo membro della (4.17) utilizzando l'equazione di stato:

$$p = \rho R_d T$$

si ottiene:

$$k \rho^\gamma = \rho R_d T,$$

da cui:

$$R_d T = k \rho^{(\gamma-1)} \quad (4.20)$$

Confrontando ora la (4.20) con la legge dei gas scritta nella forma: $R_d T = p/\rho$, si ottiene:

$$k \rho^{(\gamma-1)} = p \rho^{-1} \quad (4.21)$$

Riferendo la (4.21) a due stati (1) e (2), ossia scrivendo:

$$k \rho_1^{(\gamma-1)} = p_1 \rho_1^{-1} \quad (4.22a)$$

$$k \rho_2^{(\gamma-1)} = p_2 \rho_2^{-1} \quad (4.22b)$$

dividendo quindi la (4.22a) per la (4.22b) e applicando la (4.21), si ottiene:

$$\rho_1^{(\gamma-1)} / \rho_2^{(\gamma-1)} = [\rho_1 / \rho_2]^{(\gamma-1)} = p_1 \rho_1^{-1} / p_2 \rho_2^{-1} = (p_1 / \rho_1) / (p_2 / \rho_2) \quad (4.23)$$

da cui, con l'ausilio della legge dei gas $[(p_1 / \rho_1) = R_d T_1$ e $(p_2 / \rho_2) = R_d T_2]$, si ha

$$R_d T_1 / R_d T_2 = T_1 / T_2 = [\rho_1 / \rho_2]^{(\gamma-1)} \quad (4.24)$$

Ma dalla (4.19) $\{\rho = (k' p)^{1/\gamma}\}$ si ha:

$$\rho_1 = (k')^{1/\gamma} (p_1)^{1/\gamma} \quad (4.25)$$

$$\rho_2 = (k')^{1/\gamma} (p_2)^{1/\gamma}$$

da cui, per la (4.24) e la (4.25):

$$T_1/T_2 = [\rho_1/\rho_2]^{(\gamma-1)} = [(p_1)^{1/\gamma} / (p_2)^{1/\gamma}]^{(\gamma-1)} = (p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} \quad (4.26)$$

e:

$$\rho_1/\rho_2 = (p_1/p_2)^{1/\gamma} \quad (4.27)$$

come già mostrato in altro modo.

4-3.1 - Le trasformazioni isentropiche nell'atmosfera.

La trasformazione *isentropica* più notevole in atmosfera è quella della salita (o della discesa) di un sistema (o particella d'aria) senza scambio di calore con l'ambiente ($dq=0$, ossia *adiabatica*) e sufficientemente lenta (così da creare attriti trascurabili). Consideriamo qui il caso della particella che sale e che effettua una trasformazione isentropica.

Essendo l'atmosfera un fluido compressibile (a differenza dell'acqua, la quale è incompressibile, almeno alle pressioni normali dell'atmosfera), una particella d'aria che, partendo dalla pressione p_1 e dalla temperatura T_1 , si innalzi, spostandosi quindi verso regioni dell'atmosfera la cui pressione è via

via minore, si dilata, “aggiustandosi” ai valori decrescenti della pressione dell’ambiente esterno.

Prendendo il logaritmo della (4.26), ossia della:

$$T_1/T_2 = [\rho_1/\rho_2]^{(\gamma-1)} = [(p_1)^{1/\gamma}/(p_2)^{1/\gamma}]^{(\gamma-1)} = (p_1/p_2)^{(\gamma-1)/\gamma} = (p_1/p_2)^{R_d/c_p} \quad (4.28)$$

La (4.28) e’ l’equazione di un processo politropico adiabatico in forma integrale (equazione di Poisson). Nel tratto compreso fra (T_1, p_1) e (T_a, p_a) , si ottiene la variazione (nel caso qui ipotizzato, la diminuzione) della temperatura della particella, dal valore iniziale di T_1 (uguale a quella dell’aria ambiente) a quello finito (che chiameremo T_a , per ricordare che il processo è adiabatico, anzi addirittura isentropico). La stessa cosa verra’ fatta per la pressione, che verra’ indicata con p_a . Anziche’ procedere direttamente, utilizziamo un risultato che verra’ dimostrato al §4.5, equazione (4.35), il quale permette di scrivere:

$$\log T_a - \log T_1 = (\gamma-1)/\gamma [\log p_a - \log p_1] \quad (4.29)$$

Differenziando rispetto a z , avremo :

$$1/T (dT/dz)_a = (\gamma-1)/\gamma 1/p_a dp_a/dz \quad (4.30)$$

Facendo ora uso dell’equazione di stato $[p = \rho R_d T]$, dell’equazione della Statica $[dp/dz = -\rho_e g]$ e della relazione $(\gamma-1)/\gamma = R_d/c_p$, otteniamo, dopo avere moltiplicato il primo e il secondo membro della (4.30) per T_a :

$$(dT_a/dz)_a = T_a R_d/c_p 1/p dp/dz = - R_d/c_p T_a/p \rho_e g = - R_d/c_p T_a \rho_e g/\rho R_d T_a =$$

$$-\rho_e/\rho \, g/c_p = -g/c_p (T/T_e) \sim -g/c_p = -\gamma_a \quad (4.31)$$

γ_a è detto “gradiente adiabatico di temperatura” per aria non satura (o “dry adiabatic lapse-rate”) e vale circa 10^{-2} K/m.

Esso rappresenta il massimo valore di variazione (negativa) di temperatura atmosferica con la quota che non causa instabilità. In altre parole, un’atmosfera che abbia un $\gamma_e = \gamma_a$ viene detta in equilibrio indifferente, dal momento che ogni particella che venga perturbata dalla sua posizione di equilibrio verrà a trovarsi, dovunque essa venga portata dalla perturbazione, in una condizione termicamente ancora di equilibrio con l’ambiente esterno: Poiché la sua pressione si aggiusta automaticamente con i valori della pressione atmosferica ambiente, si troverà ad avere, a ogni livello di pressione esterna, la stessa pressione interna e la stessa temperatura e, quindi, per la legge dei gas, la stessa densità dell’aria circostante.

4-4 – Il primo principio della Termodinamica per l’atmosfera (considerata come un fluido continuo, indefinito e non compartimentabile).

Abbiamo visto che il primo principio della termodinamica esprime la legge di conservazione dell’energia per un sistema termodinamico in equilibrio, ossia per un sistema che, inizialmente in quiete, rimane tale anche dopo avere scambiato calore con l’ambiente circostante e avere compiuto su di esso del lavoro esterno. Per un sistema in equilibrio vale allora il principio di conservazione dell’energia che può essere così espresso:

Il calore dQ fornito a un sistema in equilibrio si ripartisce nella somma di due forme di energia, che sono rispettivamente la variazione dell'energia interna del sistema e il lavoro esterno compiuto dal sistema sull'ambiente.

In simboli:

$$\delta Q = \delta L + dU$$

Abbiamo ancora usato i classici termini di “*sistema*” e “*ambiente*”, facilmente identificabili, nella termodinamica di laboratorio, con i tradizionali contenitori di fluido, formati da cilindri e pistoni, contenenti il sistema gassoso del quale si studiano le trasformazioni.

Ma l'atmosfera è un mezzo indefinito e, soprattutto, non “compartimentabile”, nel senso che in essa non è possibile circoscrivere precisi domini spaziali che possano identificare dei “sistemi” e un “ambiente. Per questo, abbiamo ridefinito - per l'atmosfera - tali concetti.

Ricordiamo che δQ (calore fornito) e δL (lavoro compiuto) non sono differenziali esatti. Lo è invece dU (variazione di energia interna). Nel seguito considereremo processi riferiti all'unità di massa d'aria (per via della sua natura continua e non compartimentabile), per cui indicheremo con la lettera minuscola q , l e u rispettivamente il calore, il lavoro e l'energia interna per unità di massa.

Ora, però, la natura irreversibile, o quasi irreversibile, dei processi termodinamici reali nell'atmosfera non ci permetterebbe più di usare una

medesima pressione per il sistema e per l'ambiente e, inoltre, non potremmo più parlare di sistemi in equilibrio meccanico dal momento che la velocità dell'aria non è la stessa nello stato iniziale e in quello finale della trasformazione.

In questo Capitolo ignoreremo questo aspetto del problema, che riaffronteremo nel Capitolo 5 della Dinamica dell'atmosfera, ove stabiliremo l'Equazione dell'Energia Termodinamica introducendo nell'equazione l'energia cinetica del moto macroscopico d'insieme dell'aria.

Riferendoci all'unità di massa d'aria, sia p la pressione interna di un volume specifico α di aria delimitato da una superficie chiusa S e sia p_e la pressione esterna esercitata dall'ambiente. Sia dS un elemento della superficie chiusa S , delimitante α , e \vec{n} il versore normale a dS , orientato (secondo la convenzione corrente) verso l'esterno.

Su dS si esercitano le forze per unità di massa

$$d\vec{f}_e = -\vec{n} p_e dS \quad \text{da parte dell'ambiente esterno}$$

$$d\vec{f} = \vec{n} p dS \quad \text{da parte dell'ambiente interno}$$

Se il volume α aumenta, il lavoro elementare per unità di massa $d^{\text{el}} l = d^2 l = -d\vec{f}_e \cdot d\vec{l} = p_e dS \vec{n} \cdot d\vec{l} = p_e dS dn$ effettuato dal sistema contro le forze di pressione esterne $d\vec{f}_e$ è uguale al lavoro, cambiato di segno, che queste ultime compiono sul sistema, ossia [riferendoci anche alla Fig. (4.2)]:

$$\delta l = - \int_S d\vec{f}_e \cdot d\vec{l} = \int_S p_e dS \vec{n} \cdot d\vec{l} = p_e d\alpha$$

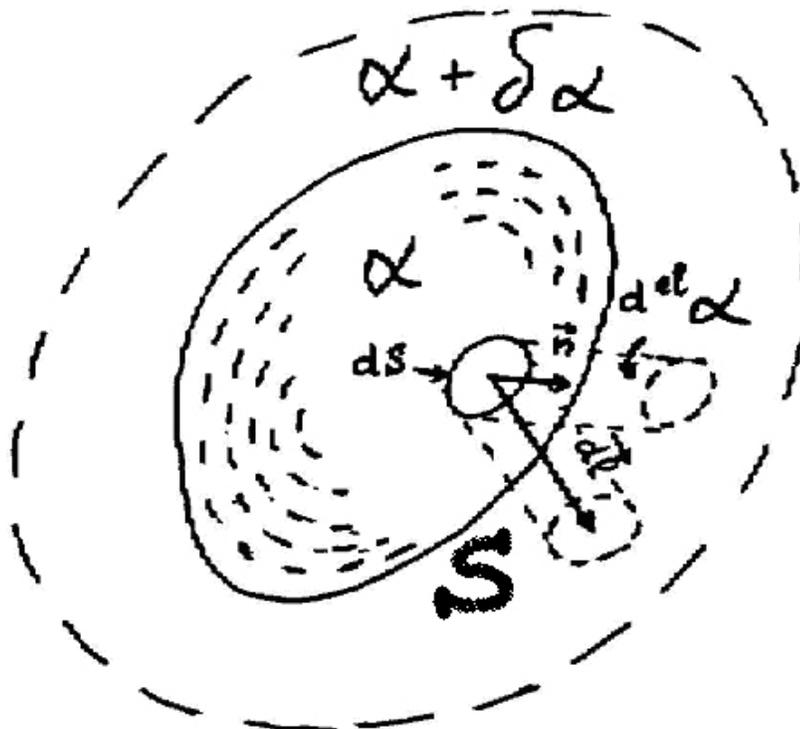


Fig (4.2)

Con riferimento invece alla Fig. (4.2a), vediamo che il gas, il cui volume e' V ed e' delimitato dalla superficie S (adiabatica e deformabile), esercita – su ogni elemento dS di S – la pressione $\Pi = \text{cost} = p$, normale a S .

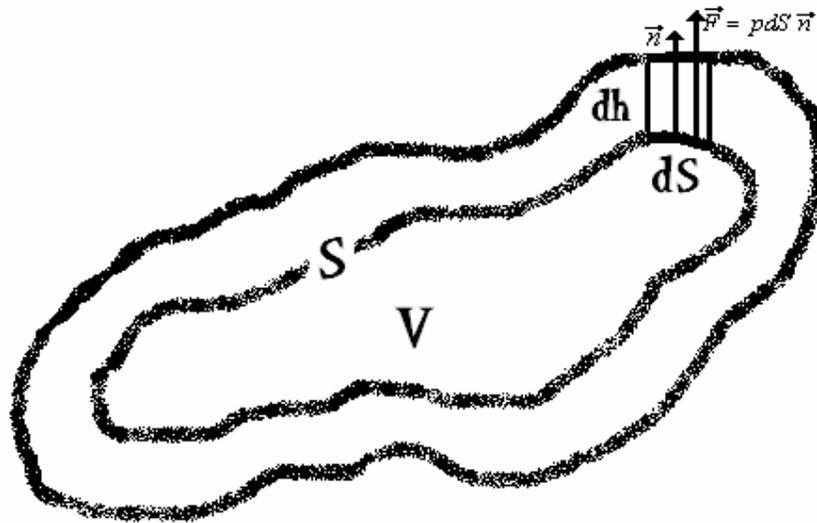


Fig. (4.2a)

Se dh e' lo spostamento di dS , il lavoro infinitesimo compiuto dal gas su dS sara' $\Pi \vec{n} dS \cdot d\vec{h}$, mentre quello su tutta la superficie S sara'

$$\delta L = \int_S \Pi \vec{n} dS \cdot d\vec{h} = \Pi \int_S \vec{n} dS \cdot d\vec{h} = \Pi dv = p dv \text{ (essendo } \Pi = \text{cost} = p).$$

Per una trasformazione finita fra il volume V_A e il volume V_B , si avra'

$$L = \int \delta L = \int_{V_A}^{V_B} p dv.$$

Questa relazione si giustifica se si considera il contorno sottoposto dall'ambiente a pressione $p_e = \text{cost}$ e si ricordano le convenzioni sul segno del lavoro e del calore scambiato³. Solo se la trasformazione puo' considerarsi una successione di stati di equilibrio (trasformazione ideale e reversibile

³ C. Castagnoli – Fisica Generale – Levrotto e Bella – pag. 557

o, nei casi reali, trasformazione abbastanza lenta perché in ogni istante la pressione interna possa considerarsi in equilibrio con quella esterna) si può ritenere $p_e = p$ e scrivere (condizione *quasi statica*):

$$\delta l = p d\alpha$$

Se la trasformazione è reversibile si ha pertanto:

$$\delta q = p d\alpha + du \quad (4.32)$$

Per un gas perfetto l'energia interna è funzione della sola temperatura cioè:

$$du = c_v dT$$

relazione valida per un gas ideale (essendo U funzione di stato).

Il primo principio della termodinamica si può allora scrivere sotto forma:

$$\delta q = c_v dT + p d\alpha \quad (4.33)$$

In meteorologia si preferisce scrivere il principio sotto la forma in cui compaiono soltanto le grandezze direttamente misurabili p e T .

Per differenziazione dell'equazione di stato si ottiene:

$$d(p\alpha) = p d\alpha + \alpha dp = R_d dT \quad (4.33a)$$

Poiché:

$$c_p = c_v + R_d \quad (4.33b)$$

sostituendo nella (4.33) la (4.33a) e (4.33b), si ottiene:

$$\delta q = c_v dT - \alpha dp + R_d dT = C_p dT - \alpha dp$$

Infine, esprimendo α in termini di T e p (equazione di stato), si ottiene:

$$\delta q = c_p dT - R_d T \frac{dp}{p} \quad (4.34)$$

Ricordiamo ora che, per il principio di equipartizione dell'energia, a ciascun grado di libertà di una molecola compete l'energia cinetica media $\frac{1}{2}KT$ e che, per 1 kg di gas, è:

$$u = u_o + \frac{nKfT}{2} = u_o + R_d \frac{fT}{2} \quad (4.34a)$$

$n = \frac{N}{\mu}$ = numero di molecole per kg (con $N = 60.25 \cdot 10^{25}$ (numero di molecole/kmole, detto anche numero di Avogadro, e μ massa molecolare del gas [kg/(kmole)]);

$K = 1.38 \cdot 10^{-23}$ joule K^{-1} , costante universale di Boltzmann;

$f =$ numero di gradi di libertà delle molecole.

Per la (4.34a) si ha, quindi, per $m = 1kg$:

$$c_v = \frac{du}{dT} = \frac{nKf}{2} = \frac{f}{2}R_d$$

$$c_p = R_d + c_v = \frac{2+f}{2}R_d$$

da cui:

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{2+f}{f}$$

Per un gas biatomico è $f = 5$

Per aria secca i valori di c_p e c_v sono pertanto:

$$c_p = \frac{7}{2}R_d = 1003 \text{ joule } K^{-1} \text{ kg}^{-1} = 0.240 \text{ Cal } K^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$c_v = \frac{5}{2}R_d = 716 \text{ joule } K^{-1} \text{ kg}^{-1} = 0.171 \text{ Cal } K^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{7}{5} = 1.40$$

Per un gas triatomico è $f = 6$; per il vapor d'acqua i valori sono perciò:

$$c_{pv} = 4R_v = 1846 \text{ joule } K^{-1} \text{ kg}^{-1} = 0.441 \text{ Cal } K^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$c_{vv} = 3R_v = 1385 \text{ joule } K^{-1} \text{ kg}^{-1} = 0.331 \text{ Cal } K^{-1} \text{ kg}^{-1}$$

$$\frac{c_{pv}}{c_{vv}} = \frac{4}{3} = 1.333$$

4.5 – Le trasformazioni adiabatiche reversibili per aria non satura.

La temperatura potenziale.

Un processo adiabatico è, come si è già detto, un processo nel corso del quale non si verifica scambio di calore tra il sistema e l'ambiente. Per esso, quindi, $\delta q = 0$. Se il processo è reversibile, si ha dalla (4.34)

$$c_p dT = R_d T \frac{dp}{p} \quad \text{cioè, posto } k = \frac{R_d}{c_p} \quad (4.35a)$$

$$\frac{dT}{T} = k \frac{dp}{p} \quad \text{ossia:} \quad dT = kT \frac{dp}{p} \quad (4.35b)$$

relazione differenziale valida approssimativamente anche per piccole variazioni finite di pressione.

La (4.33) mostra che in un processo adiabatico il lavoro compiuto contro le forze esterne di pressione scaturisce dall'energia interna; se il lavoro è positivo, ossia associato a un'espansione ($d\alpha > 0$), l'energia interna diminuisce ($dT < 0$), e viceversa. L'equazione della prima legge della termodinamica per un processo adiabatico può essere scritta anche in forma integrale. Si abbiano due stati di una massa d'aria, ossia lo stato iniziale p_o, T_o e quello finale p e T . Integrando la (4.35b) dopo avere separato le variabili, abbiamo:

$$\int_{T_o}^T c_p \frac{dT}{T} = \int_{p_o}^p R_d \frac{dp}{p}$$

da cui:

$$\frac{T}{T_o} = \left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{R_d}{c_p}} = \left(\frac{p}{p_o}\right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p}} = \left(\frac{p}{p_o}\right)^K = \left(\frac{p}{p_o}\right)^{0.286}$$

e infine

$$T_c = T_i \left(\frac{p_c}{p_i}\right)^K \quad (4.36)$$

essendo $\frac{R_d}{c_p} = \frac{c_p - c_v}{c_p} = k = 0.286$ ed avendo posto $T_0 = T_i$ e $T = T_c$.

La (4.36) è l'equazione di un processo politropico adiabatico in forma integrale (equazione di Poisson (3.33d) [vedi anche § 3.12A].

Confinando ora la nostra attenzione all'atmosfera libera, vogliamo determinare la variazione della temperatura interna T di un elemento fluido che si innalza adiabaticamente. Riscriviamo la prima delle (4.35) nel seguente modo:

$$c_p dT - R_d T \frac{dp}{p} = 0 \quad (4.37)$$

Ricordando l'equazione fondamentale della statica e l'equazione di stato, si ha, per l'atmosfera ambiente (i cui parametri termodinamici sono ora indicati con il suffisso "e", tranne la pressione per la quale vale l'ipotesi quasi statica $p = p_e$):

$$\frac{dp}{p} = -g \frac{dz}{R_d T_e} \quad (4.37a)$$

da cui per sostituzione nella (4.37). si ottiene, dopo aver diviso ambo i membri per $c_p dz$:

$$-\left(\frac{dT}{dz}\right)_a = \frac{g}{c_p} \frac{T}{T_e} \quad (4.38)$$

Integrando la (4.37) si ottiene la soluzione politropica (3.33d) (eq. di Poisson) che da' T in funzione di p . Questa soluzione, in coordinate di pressione, è compatibile con $\gamma_a = \text{cost} = \frac{g}{c_p}$, ossia $\left(-\frac{dT}{dz}\right)_a = \gamma_a$. La (4.38) è la soluzione della (4.37) dopo aver trasformato le coordinate di pressione in coordinate geometriche mediante l'equazione idrostatica.

Riprenderemo questo argomento piu' avanti, quando studieremo i processi isentropici. In quell'occasione, introdurremo anche le coordinate isentropiche e la funzione di corrente di Montgomery, e definiremo la nuova temperatura convenzionale θ , detta *temperatura potenziale*.

L'indice "a", introdotto a partire dalla (4.38), indica che si tratta di un processo adiabatico. La (4.38) è la legge cercata di variazione con l'altezza della temperatura di un elemento fluido che si muove verticalmente; il segno negativo del primo membro mostra che, incrementandosi la quota ($dz > 0$), la temperatura diminuisce, ossia la particella d'aria si raffredda; fisicamente, questo è dovuto alla diminuzione di energia interna che viene spesa per compiere il lavoro di espansione. Dalla (4.38) si osserva ancora che il *lapse rate* adiabatico secco $\gamma_a = -\left(\frac{dT}{dz}\right)_a$ è una quantità non costante, il cui valore dipende dal rapporto $\frac{T}{T_e}$.

Poiché però, nelle situazioni pratiche, la differenza $T - T_e$ è $< 10^\circ K$, ossia molto piccola rispetto a T e a T_e , si è convenuto di porre $\frac{T}{T_e} \cong 1$, per cui la

(4.38) diviene:

$$\gamma_a = - \left(\frac{dT}{dz} \right)_a = \frac{g}{c_p} = 9.8 \cdot 10^{-3} \text{ } ^\circ K \text{ m}^{-1}$$

Pertanto, si può concludere che una particella d'aria, che si innalzi adiabaticamente nell'atmosfera, si raffredda di circa 1 grado Kelvin ogni 100 metri. La curva che esprime la variazione di T con l'altezza di una tale particella fluida è detta *curva adiabatica secca* o *curva di stato di una particella di aria secca*.

Abbiamo già visto che il processo adiabatico è un caso particolare del più generale processo politropico (§ 3.12A) nel quale il flusso di calore verso una particella d'aria è proporzionale alla differenza di temperatura, ossia:

$$dq = C dT$$

dove C rappresenta il calore specifico del processo politropico. Infatti, ponendo $C = 0$ si ottiene il processo adiabatico ($dT \neq 0$ per $dq = 0$). Ponendo invece successivamente $C = C_p, C_v$, e $+\infty$, si hanno i processi cosiddetti isobaro ($dq = C_p dT$), isosterico ($dq = C_v dT$) e isotermo ($dT = 0$ per δq diverso da 0). Nei due casi, isobaro e isosterico, dq diviene il differenziale esatto dq , e coincide rispettivamente con la variazione di entalpia e con la variazione di energia interna.

4.6 – Temperatura potenziale θ e stabilità dell'atmosfera non satura.

Si definisce temperatura potenziale θ di una particella d'aria la temperatura che essa assumerebbe se fosse trasportata, con una legge adiabatica non satura, dal livello di pressione p al quale si trova ad un livello standard di pressione p_s , fissato per convenzione a 1000 mb ($10^6\text{ dine/cm}^2 = 1000\text{ hPa} = 100\text{ kPa}$). Consideriamo due stati di una particella d'aria: lo stato iniziale sia (T, p) e quello finale sia $(\theta, 1000\text{ mb})$. Dalla (4.36) ricaviamo così la relazione:

$$\theta = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p}} \quad (4.39)$$

che esprime la dipendenza di θ da T e da p . Ricordando che, per una particella che si innalza, la sua temperatura diminuisce di $\approx 1^\circ\text{C}/100\text{ m}$, e fissando convenzionalmente il valore $p_s = 1000\text{ mb}$ al livello z_0 del mare, è possibile ottenere una espressione empirica approssimata, ma semplificata, per la dipendenza di θ da T e z ; essa vale:

$$\theta = T + \frac{z}{100}$$

dove 100 indica il valore di $1/\gamma_a$ (100 m/K).

Se invece, come spesso avviene, la pressione p_0 al livello z_0 del mare e' diversa da 1000 hPa, si ha:

$$\theta = T + \frac{z}{100} + \frac{1000 - p_0}{12.5} \quad (4.40)$$

L'ultimo termine della (4.40) rappresenta la variazione della temperatura della particella quando quest'ultima viene rimossa dalla superficie e portata a 1000 mb.

Infatti, se h è l'altezza che corrisponde a una variazione di 1 mb di pressione (detta anche *pressure step* e definita nel Capitolo della Statica) e se ad esempio $p_o < 1000\text{mb}$, allora il livello 1000mb si trova a $(1000 - p_o)h$ metri sotto la superficie terrestre; poiché, al livello del mare, $h \cong 8\text{m}/\text{mb}$, si ottiene appunto:

$$\frac{(1000 - p_o) \cdot 8}{100} = \frac{1000 - p_o}{12.5}$$

e valendo l'uguaglianza: $\frac{1}{12.5} = 0.08$.

La principale proprietà di \mathcal{G} è data dal fatto che, negli spostamenti adiabatici non saturi di una particella (ossia senza passaggi di stato dell'acqua), essa si mantiene costante. Infatti, derivando logaritmicamente la (4.39), abbiamo:

$$\frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = \frac{dT}{T} - \frac{R_d}{c_p} \frac{dp}{p} \quad (4.41)$$

oppure ancora

$$c_p T \frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = c_p dT - R_d \frac{dp}{p} \quad (4.41a)$$

Ma, ricordando la (4.37) e dividendola per $c_p T$, otteniamo che, per il processo adiabatico, sarà:

$$\frac{d\mathcal{G}}{\mathcal{G}} = 0 \quad (4.41b)$$

Questa proprietà di conservazione della temperatura potenziale viene usata in pratica per descrivere i movimenti e la trasformazione delle masse d'aria. Le variazioni della temperatura potenziale di una massa d'aria durante il moto, ad esempio, danno un'indicazione dei flussi di calore in gioco fra la massa d'aria e l'ambiente nel quale essa si sposta e, quindi, del grado di scostamento dei processi reali dalla schematizzazione ideale adiabatica. Infatti:

$$\delta q = c_p dT - R_d T \frac{dp}{p} = c_p T \frac{d\vartheta}{\vartheta} \quad (4.41c)$$

da cui, per la (4.41):

$$\delta q = c_p T \frac{d\vartheta}{\vartheta} \quad (4.42)$$

o anche :

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta} = \frac{\delta q}{c_p T} \quad (4.42a)$$

Un'altra rimarchevole proprietà della temperatura potenziale può essere messa in evidenza scrivendo, come già fatto precedentemente, la (4.41) nel modo seguente [ossia, utilizzando l'equazione fondamentale della Statica ($-dp = \rho_e g dz$) e l'equazione di stato dei gas]:

$$c_p T \frac{d\vartheta}{\vartheta} = c_p dT + \frac{gT}{T_e} dz \quad (4.42b)$$

da cui:

$$c_p T \frac{d\vartheta}{\vartheta} - c_p dT - g dz - \frac{g(T - T_e)}{T_e} dz = 0 \quad (4.43)$$

avendo ricordato che, in condizioni di equilibrio fra particella d'aria e ambiente (per cui $p_e = \rho_e R_d T_e$ e $p = \rho R_d T$), si ha:

$$p_e = p \rightarrow \rho_e R_d T_e = \rho R_d T, \quad \text{ossia: } \rho_e T_e = \rho T, \quad \text{da cui} \quad \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_e} \quad (4.43a)$$

Si è arrivati alla (4.43) avendo dapprima sottratto gdz e aggiunto $g \frac{T_e}{T} dz$ alla (4.42b) e, successivamente, avendo moltiplicato la (4.41) per $c_p T$, applicando infine l'equazione della Statica [$dp = -\rho_e g dz$] e la legge di stato dei gas nella forma [$p = \rho R_d T$].

Introduciamo ora le notazioni:

$$c_p dT = dh; \quad g dz = d\phi; \quad dz \frac{g(T - T_e)}{T_e} = de$$

dove $h = c_p T + \text{cost}$ è **l'entalpia** (o contenuto termico); $\phi = gz + \text{cost}$ è **l'energia potenziale**, ossia **l'energia gravitazionale alla quota z** sopra il livello del mare, ed e è **l'energia di instabilità** ossia, come vedremo fra poco, il lavoro compiuto dalla forza di buoyancy (che è la forza di galleggiamento idrostatico che si manifesta allorché l'elemento fluido ha densità diversa da quella dell'aria circostante) della particella di massa unitaria per spostamenti verticali dal livello del mare alla quota z in una atmosfera non adiabatica. Con queste notazioni, la (4.43) diviene:

$$c_p T \frac{d\mathcal{G}}{g} = dh + d\phi + de = d\Pi = dq \quad (4.44)$$

dove $\Pi = h + \phi + e$ è l'energia totale di una particella di massa unitaria.

La (4.44) mostra che una variazione in ϑ è legata alla variazione dell'energia totale della particella d'aria. Nei moti adiabatici $d\Pi = dq$ (confronta la (4.42), ossia:

$$\Pi = h + \phi + e = \text{costante} \quad (4.45)$$

Le considerazioni fin qui esposte ci consentono ora di affrontare il problema della stabilità di una massa d'aria. L'analisi viene fatta considerando il gradiente termico $\gamma_e = -\partial T_e / \partial z$ dell'aria ambiente e isolando in essa una particella d'aria al livello a cui l'atmosfera viene studiata⁴

La particella viene quindi spostata verticalmente e, affinché il suo moto non influenzi l'ambiente che la circonda, occorre introdurre due ipotesi: quella di dimensioni infinitesime della particella e quella di processo adiabatico. In virtù di questa seconda ipotesi, la variazione della temperatura interna T della particella è caratterizzata dal lapse-rate conseguente al suo processo di espansione adiabatico non saturo γ_a . Si presentano quindi tre casi, secondo che si abbia $\gamma_e \gtrless \gamma_a$; esaminiamoli singolarmente.

I caso : $\gamma_e > \gamma_a$

⁴

La conservazione di Π nelle trasformazioni adiabatiche è soddisfatta da variazioni dei tre termini di energia che la compongono purchè vincolate dalla condizione che la loro somma sia un invariante. Ciò permette *flussi* o scambi di energia meccanica in energia termica o di galleggiamento idrostatico (o viceversa), il che è alla base di vari processi che presiedono alla formazione e allo sviluppo dei moti atmosferici.

Per questi ultimi, ovviamente, diviene preponderante il flusso di energia esterna (ad esempio, l'irraggiamento solare) che si aggiunge all'energia totale Π del sistema attraverso un termine q esprimente il calore scambiato nella trasformazione termodinamica più generale, detta anche *adiabatica*.

Se vi è scambio di calore, ossia la trasformazione è *adiabatica*, la (4.41) e la (4.42) mostrano che è:

$$d(\Pi + q) = 0$$

sia che la grandezza che si conserva è $\Pi + q$. Il calore q scambiato con l'esterno può quindi *convertirsi* in altre forme di energia, come visto prima, e l'atmosfera riceverà ora l'energia necessaria ai suoi moti e ai suoi processi non più solamente dall'energia interna ma anche, e soprattutto, da fonti di calore esterne.

La temperatura ambiente, in questo caso, decresce con l'altezza più rapidamente di quanto non faccia la temperatura della particella che sale.

Supponiamo che, al livello di riferimento z_o , siano uguali la T_e dell'aria ambiente e la T della particella; se la particella, sotto l'effetto di una perturbazione anche infinitesima, raggiunge un livello $z_2 > z_o$, la sua temperatura T risulta essere maggiore di T_e e pertanto la sua densità ρ è minore di ρ_e , in quanto $p = p_e$ ovunque.

In questa situazione, sulla nostra particella viene ad agire una forza idrostatica, o di galleggiamento, o di buoyancy, data da $g(\rho_e - \rho)$. Nel caso qui ipotizzato la risultante di questa forza è orientata verso l'alto, essendo $(\rho_e - \rho) > 0$; per questa ragione, la particella continuerà a salire spontaneamente e indipendentemente dalla perturbazione iniziale. L'accelerazione della particella soggetta a questa forza sarà pertanto:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = g \frac{\rho_e - \rho}{\rho} = g \frac{T - T_e}{T_e} \quad (4.46)$$

l'ultimo passaggio essendo giustificato dall'equazione di stato, per la quale $\rho = \frac{p}{R_d T}$ e $\rho_e = \frac{p}{R_d T_e}$; poiché il nostro elemento fluido sta salendo, $T > T_e$ ossia $d^2z/dt^2 > 0$. Questo significa che, se $\gamma_e > \gamma_a$, una particella d'aria, spostata dalla sua posizione d'equilibrio verso l'alto, acquista un'accelerazione verso l'alto $d^2z/dt^2 > 0$ che contribuisce ad esaltare il suo spostamento.

Se, invece, l'elemento fluido viene forzato a scendere verso una quota $z_3 < z_o$, allora la sua temperatura T diverrà minore di T_e (corrispondentemente, sarà

$\rho > \rho_e$), per cui anche in questo caso (in cui ora $\frac{d^2z}{dt^2} < 0$) la particella subirà un'accelerazione verso il basso che ne esalterà lo spostamento.

L'aria in questa condizione, viene detta instabile, in quanto ogni sua fluttuazione o perturbazione viene amplificata in modo che un eventuale stato di equilibrio iniziale, sotto l'azione di cause perturbatrici anche minime, non può essere mantenuto.

La velocità raggiunta dalla particella d'aria si mantiene limitata grazie all'azione delle forze di attrito che subito si manifestano e sono funzione della velocità'.

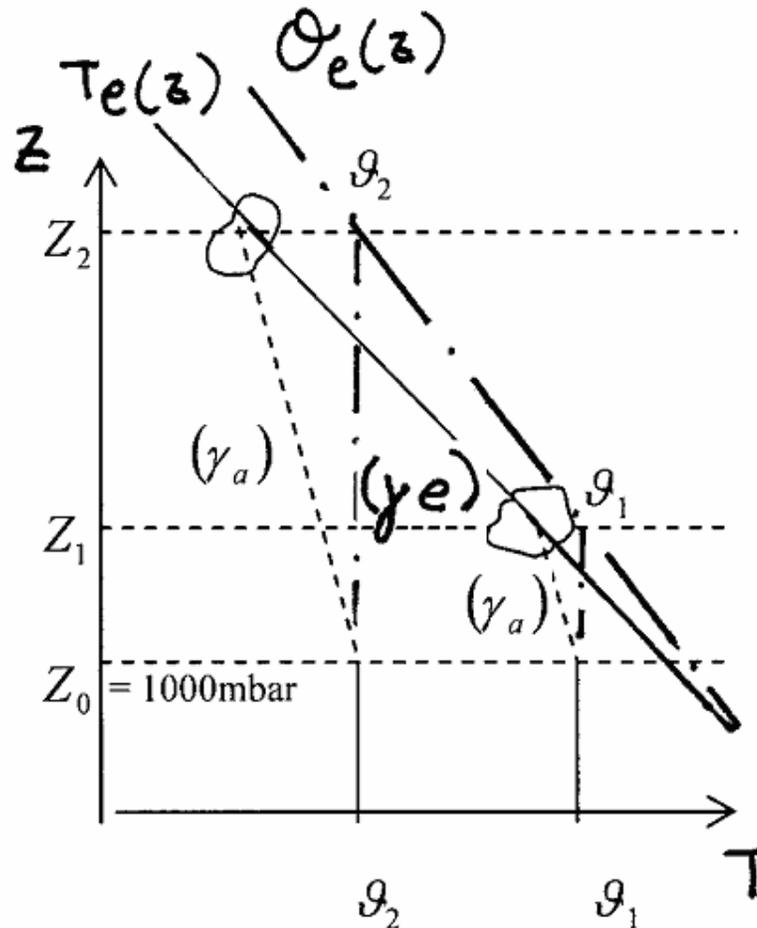


Fig. (4.3)

La distribuzione dei diversi valori di ϑ nell'aria instabile, riportata ai livelli da cui le ipotetiche particelle d'aria erano state trasferite e portate al livello p_s , permette di tracciare i profili verticali della temperatura potenziale θ_e dell'aria ambiente, e può essere ricavata osservando la Fig. (4.3). Consideriamo due livelli z_1 e z_2 e portiamo due elementi fluidi da questi due livelli al livello $1000mb$. Essendo $\gamma_e > \gamma_a$, sarà $\vartheta_2 < \vartheta_1$, ossia nell'aria instabile le masse *potenzialmente* più fredde sovrastano quelle *potenzialmente* più calde, cioè ϑ_e decresce con l'altezza.

II caso : $\gamma_e = \gamma_a$

In questo caso, a tutti tre i livelli z_0, z_2 e z_3 , si ha:

$$T = T_e; \quad \rho = \rho_e$$

L'accelerazione (4.46) è pertanto nulla e lo stato termico dell'atmosfera, caratterizzato da $\gamma_e = \gamma_a$, è detto di equilibrio indifferente. La temperatura potenziale ϑ è, come s'è visto, caratterizzata da una distribuzione uniforme: $\vartheta = \text{cost.}$

Quando, come in questo caso, i moti verticali adiabatici sono tali per cui la densità delle masse in moto è sempre uguale a quella della massa ambiente, si dice che l'atmosfera è in *condizioni di stratificazione adiabatica, o neutrale, o di equilibrio indifferente.*

III caso: $\gamma_e < \gamma_a$

La temperatura ambiente, in questo caso, diminuisce con l'altezza più lentamente di quanto non faccia la temperatura della particella che sale. Si ha pertanto la situazione esattamente opposta a quella del primo caso. Con accelerazioni “negative” (4.46) associate a spostamenti positivi e accelerazioni “positive” associate a spostamenti negativi.

Una particella d'aria, forzata a salire o a scendere da un certo livello z_o , sarà ricondotta dalla forza idrostatica al punto di partenza; si ha una situazione simile a quella di un mezzo elastico, nel quale ogni punto, spostato dalla sua posizione d'equilibrio, è soggetto a forze di richiamo che tendono a riportarlo.

L'aria, caratterizzata dallo stato termico $\gamma_e < \gamma_a$ si dice quindi *in equilibrio stabile* o semplicemente *stabile*, in quanto ogni sua fluttuazione verrà contrastata dalle forze idrostatiche e un eventuale stato di non equilibrio non potrà essere mantenuto. Come nel caso dell'instabilità, anche qui intervengono le forze d'attrito, smorzando le oscillazioni delle particelle d'aria finché non venga ristabilito l'equilibrio. La temperatura potenziale, in questo caso, aumenta con l'altezza. La variazione quantitativa della temperatura potenziale ϑ_e dell'aria con l'altezza, nei tre casi considerati, può essere calcolata nel modo seguente: dividendo la (4.41) per dz e sostituendo ϑ_e a ϑ e T_e a T , abbiamo:

$$\frac{1}{\vartheta_e} \frac{\partial \vartheta_e}{\partial z} = \frac{1}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} - \frac{R_d}{c_p p} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (4.47)$$

da cui, sostituendo – come fatto precedentemente - a $\frac{\partial p}{\partial z}$ il suo valore dato

dall'equazione fondamentale della statica per l'aria ambiente $\left(\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_e g\right)$ e

applicando la legge dei gas ($p = \rho R_d T$) per la particella, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{G}_e}{\partial z} &= \frac{\mathcal{G}_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} - \frac{\mathcal{G}_e R_d}{c_p p} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\mathcal{G}_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} + \frac{\mathcal{G}_e R_d \rho_e g}{c_p p} = \frac{\mathcal{G}_e}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial z} + \frac{\mathcal{G}_e R_d \rho_e g}{c_p \rho R_d T} = \\ &= \frac{\mathcal{G}_e}{T_e} \left[\frac{\partial T_e}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \frac{\rho_e}{\rho} \right] = \frac{\mathcal{G}_e}{T_e} \left[\frac{g}{c_p} \frac{T}{T_e} + \frac{\partial T_e}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (4.47a)$$

Infine, dopo aver moltiplicato il secondo termine del quarto membro della (4.47a) per $T/T_e \sim T_e/T_e = 1$, si ottiene:

$$\frac{\partial \mathcal{G}_e}{\partial z} = \frac{\mathcal{G}_e}{T_e} (\gamma_a - \gamma_e) \quad (4.48)$$

essendo, nel sistema delle coordinate geometriche:

$$\frac{T}{T_e} \frac{g}{c_p} = \gamma_a \quad \text{e} \quad \frac{\partial T_e}{\partial z} = -\gamma_e$$

La (4.47) si accorda bene con le conclusioni qualitative precedenti, poiché

$$\frac{\partial \mathcal{G}_e}{\partial z} \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 0 \quad \text{secondochè} \quad \gamma_a \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} \gamma_e.$$

Ricordiamo che tutta la teoria fin qui sviluppata ha presupposto l'esistenza di processi adiabatici; nonostante nell'atmosfera reale ciò non si verifichi

appieno, i risultati ottenuti sono da considerarsi validi, in quanto essi sono confermati dalle osservazioni sperimentali.

4-7 - La densità potenziale dell'aria.

Abbiamo finora imparato che, innalzando o abbassando adiabaticamente una particella d'aria in una atmosfera ambiente il cui profilo verticale sia dato dalla legge differenziale:

$$- dT_e/dz = \gamma_e$$

la particella cambierà la propria temperatura con la legge γ_a vista precedentemente e si troverà in equilibrio stabile, neutro o instabile a seconda che γ_e sia minore, uguale o maggiore di γ_a .

Abbiamo anche visto che un criterio ancora più semplice è dato dall'introduzione del concetto di temperatura potenziale θ , di cui ricordiamo qui unicamente l'equazione definitoria (di Poisson), ossia:

$$\theta = T (p_s/p)^{\gamma-1/\gamma} = T (p_s/p)^{Rd/cp}$$

Invece di usare la temperatura θ e il suo gradiente verticale come indicatori delle condizioni di equilibrio dell'atmosfera, possiamo usare la densità potenziale ρ_θ dell'atmosfera, la cui definizione è molto simile a quella della temperatura potenziale. Si definisce infatti densità potenziale ρ_θ

dell'atmosfera la densità raggiunta da una particella d'aria quando viene portata alla pressione standard p_s .

La densità potenziale dell'aria (al pari della temperatura potenziale) è una “densità convenzionale”, che non deve essere confusa con la vera densità, che è la densità “assoluta”.

Abbiamo visto che una particella d'aria che venga spostata verticalmente si dilata o si contrae - senza scambi di calore - per equilibrarsi con la pressione esterna dell'aria e, così facendo, si raffredda o si riscalda secondo la legge del processo termodinamico adiabatico γ_a , acquisendo densità che possono essere maggiori, minori o uguali a quella dell'ambiente circostante, a seconda del lapse rate ambientale γ_e di quest'ultimo.

Il concetto di densità potenziale deriva proprio da queste considerazioni.

L'atmosfera ordinaria non raggiunge, se non in casi eccezionali e in regioni molto limitate, la struttura termica dell'atmosfera omogenea (per la quale si era dimostrato, nel Capitolo della “Statica”, che il *lapse rate* doveva essere $\gamma_A = 3.43 \cdot 10^{-2}$ gradi Kelvin per metro, per produrre una distribuzione verticale di densità assoluta costante con la quota).

Di norma, la densità assoluta dell'aria diminuisce con la quota ma ciò non impedisce all'aria di essere in condizioni instabili (come si è visto). A differenza dell'acqua, che è incompressibile - *trascorrendo l'effetto “termobarico” dell'anomalia di densità dell'acqua a 4 °C* - e quindi non suscettibile (se non in modo impercettibile) di cambiamenti della propria densità al cambiare della pressione esterna a cui può essere sottoposta, l'aria è invece un fluido compressibile. Ciò fa sì che la densità di una particella d'aria dipenda sensibilmente dalla pressione esterna, il che avviene appunto allorché particelle d'aria si spostano verticalmente nel mezzo atmosferico per effetto di perturbazioni di varia natura.

Un'altra, non trascurabile, differenza fra l'aria e l'acqua è data dal fatto che la prima, dilatandosi o contraendosi, non solo varia la sua densità in conseguenza dell'aumento o della diminuzione del suo volume, ma anche si raffredda o si riscalda con la legge adiabatica, mentre la seconda - non dilatandosi né contraendosi - mantiene la propria densità d'origine.

L'unica possibilità per una particella d'acqua di venirsi a trovare in condizioni instabili quando sale o scende entro un corpo d'acqua che la contiene è data dalla temperatura che essa possiede, temperatura che non cambia con lo spostamento verticale. Se questa temperatura è maggiore della temperatura dell'acqua "ambiente" che viene raggiunta dalla particella, la particella sarà più leggera e continuerà a salire, conservando (almeno in linea di principio) la propria temperatura.

Per l'aria, abbiamo visto che la situazione è radicalmente diversa: le contrazioni o dilatazioni di volume della particella d'aria ne fanno cambiare la temperatura e quindi, a parità di pressione, la densità, determinando così condizioni di equilibrio stabile o instabile o neutro a seconda dell'entità e, soprattutto, del segno della variazione.

Abbandonando ora questa descrizione qualitativa e cercando di porre in evidenza le leggi fisiche che regolano i processi atmosferici, riscriviamo per la densità dell'aria la relazione (4.27) che la lega alla pressione in un processo isentropico:

$$\rho_1/\rho_2 = (p_1/p_2)^{1/\gamma} \quad (4.27)$$

Ricordando la definizione di densità potenziale dell'aria data all'inizio di questo paragrafo e la sua somiglianza con quella della temperatura potenziale, definiamo la densità potenziale dell'atmosfera ambiente ρ_{e0} con un'equazione formalmente simile all'equazione di Poisson, ossia:

$$\rho_{e\theta} = \rho_e (p_s/p)^{1/\gamma} \quad (4.49)$$

La (4.49) trasforma il profilo verticale della densità assoluta ρ_e dell'aria in un profilo di densità convenzionale, la densità potenziale, la cui derivata verticale ad ogni livello (di altezza geometrica o di pressione) indica le condizioni locali di instabilità o stabilità o neutralità dell'equilibrio atmosferico.

Se moltiplichiamo l'equazione di Poisson della temperatura potenziale dell'atmosfera ambiente per l'equazione simile relativa alla densità potenziale, otteniamo:

$$T_e \rho_e = \rho_{e\theta} \theta_e [(p/p_s)^{1/\gamma} (p_s/p)^{1/\gamma}] = \rho_{e\theta} \theta_e [(p/p_s) (p_s/p)]^{1/\gamma} = \rho_{e\theta} \theta_e = \text{cost}$$

essendo $T_e \rho_e = p_e / R_d$ ⁵

4.8 – La prima legge della Termodinamica per i processi adiabatici saturi in atmosfera.

La termodinamica dell'atmosfera non può mantenere l'ipotesi, fatta dalla statica, secondo cui il vapor d'acqua si comporta sempre in modo simile a un gas perfetto; si rende pertanto necessario considerare la termodinamica

⁵ Infatti:

$$\theta_e = T_e \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\rho_{e_s} = \rho_e \left(\frac{p_s}{p_e} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \theta_e \rho_{e_s} = T_e \rho_e \frac{p_s}{p_e} = \frac{p_e}{R_d} \frac{p_s}{p_e} = \frac{p_s}{R_d} \approx \text{cost}$$

atmosfera alla saturazione separatamente da quella dell' "aria secca" o non satura di umidità.

Introduciamo ora, come annunciato precedentemente, il sistema di coordinate "isentropiche", nel quale la coordinata verticale è sostituita dalla temperatura potenziale θ .

Poiché nei flussi adiabatici la temperatura potenziale θ si conserva seguendo il moto, le coordinate isentropiche divengono assai utili per individuare le traiettorie delle singole particelle atmosferiche. Si può dimostrare che vale la relazione $\frac{1}{\rho} \nabla_H p = \nabla_s \psi$, dove $\psi = C_p T + \Phi$.

Ψ prende il nome di funzione di Montgomery, già introdotta al paragrafo (3.17a) della Statica.

Intendiamo, per processi adiabatici saturi, quei processi che, avendo luogo nell'aria o già satura o che diviene satura a seguito di particolari processi termodinamici, implicano condensazione del vapore o vaporizzazione dell'acqua.

La differenza rispetto ai processi adiabatici dell'aria non satura può essere illustrata con la seguente considerazione: in una particella di aria satura che si innalza, finché non è stata raggiunta la saturazione, le variabili di stato si modificano secondo le leggi adiabatiche non sature. In tali processi, non essendovi passaggi di stato, l'umidità specifica resta costante ($s = \text{cost}$); l'umidità relativa, invece, non è costante e aumenta al crescere dell'altezza a cui, raffreddandosi adiabaticamente, sale la particella, finché non venga raggiunta una quota z_c (livello di condensazione) alla quale l'umidità relativa raggiunge il valore della saturazione. Sopra z_c , a mano a mano che la particella sale, il vapor d'acqua comincia a condensare e, in seguito a questo processo, viene rilasciato il calore latente di vaporizzazione, in ragione di

$\approx 600 \frac{\text{Cal}}{\text{kg}}$ di vapor d'acqua. Ciò fa sì che, da questo momento, il raffreddamento dell'elemento fluido che sale sia meno rapido di quello dato dal *lapse rate* adiabatico secco, in quanto una parte del lavoro di espansione deriva dalla cessione del calore latente di condensazione. Inversamente, quando una particella d'aria contenente goccioline d'acqua discende, l'acqua si vaporizza (a spese dell'energia interna della particella), aumentando di molto il suo volume; un lavoro esterno viene quindi fatto dal vapore così generato contro la pressione dell'aria, ossia dell'energia viene sottratta da parte della superficie evaporante, utilizzando parte del calore dell'elemento fluido, per cui il riscaldamento dell'aria in discesa si riduce rispetto a quello che si sarebbe avuto se il processo fosse avvenuto senza evaporazione.

Prima di vedere come si modifica la legge di raffreddamento (o riscaldamento) adiabatico delle particella d'aria in moto verticale e in presenza di passaggi di stato del vapor d'acqua, è opportuno ricordare la legge di Clapeyron, che fornisce la dipendenza della pressione di vapore dalla temperatura.

4.8.1 – Equazione di Clapeyron – Andamento della pressione di vapore saturo con la temperatura assoluta.

Si consideri un diagramma termodinamico, detto di Clapeyron, avente in ascissa il volume specifico $\alpha = V/m$ ed in ordinata la pressione di vapore di equilibrio saturo $E(T)$, funzione della sola temperatura

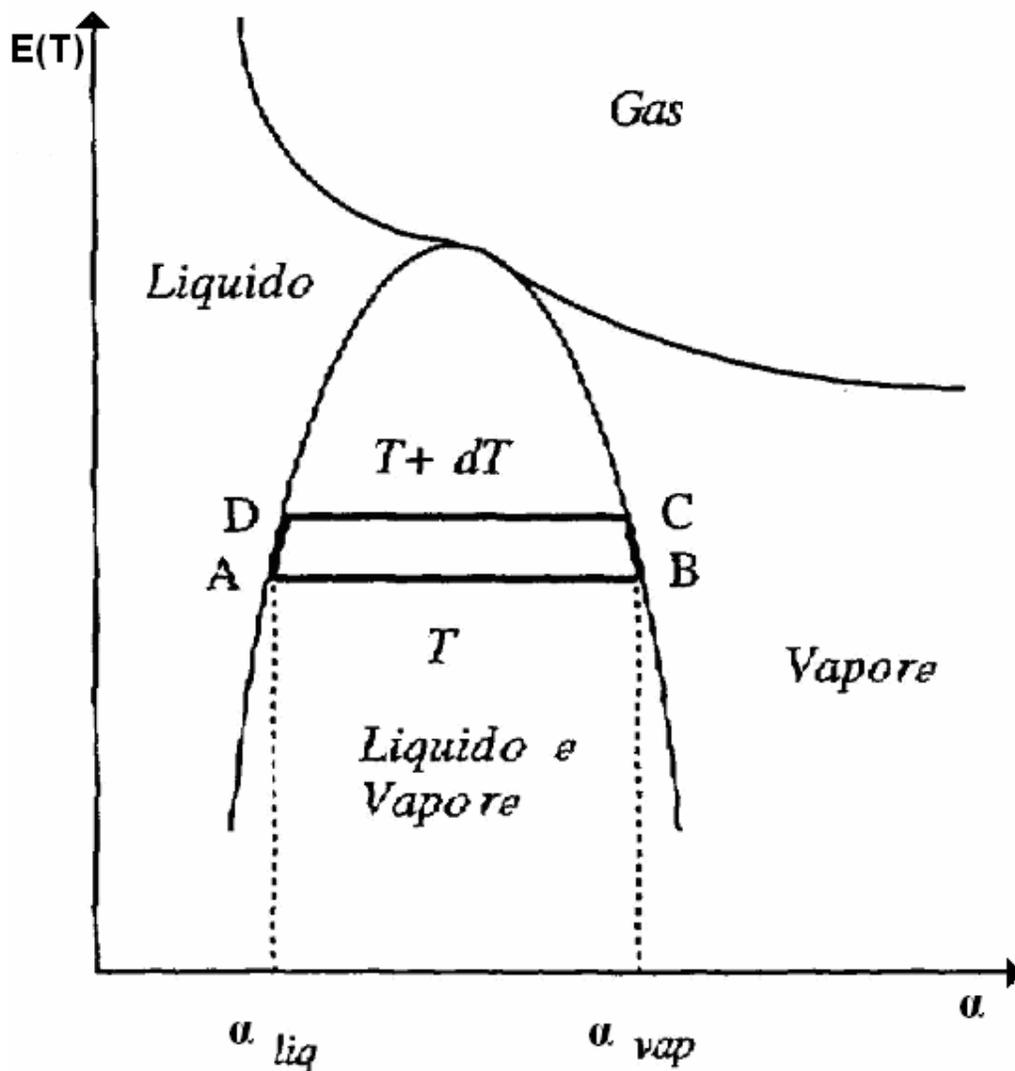


Fig. (4.4)

Al fluido venga fatta eseguire la trasformazione con i passaggi di stato acqua \rightarrow vapore saturo \rightarrow acqua.

La massa unitaria d'acqua (1 kg), occupante il volume specifico u_{liq} alla temperatura assoluta T , sia sottoposta al seguente ciclo: evaporazione isoterma totale (alla temperatura T) sino ad occupare il volume specifico u_{vap} (da A a B); riscaldamento di dT lungo l'elemento infinitesimo BC della curva di separazione fra il liquido e il vapore saturo (in corrispondenza di tale

riscaldamento la pressione di vapore saturo aumenta di dE); liquefazione isoterma a $T + dT$ (tratto CD), ritorno in A lungo l'elemento DA della curva di saturazione. Il ciclo elementare così descritto è formato da due tratti orizzontali isotermi (cambiamenti di stato) e da due non adiabatici, ma infinitesimi, quasi verticali e, pertanto, approssimabili da adiabatiche.

Esso può quindi considerarsi un ciclo elementare di Carnot.

Per compiere il ciclo bisogna fornire al sistema la quantità di calore necessaria per fare evaporare un kg di acqua (L_e , calore latente di evaporazione). Il lavoro compiuto è:

$$\delta L = (\alpha_v - \alpha_a) dE \cong \alpha_v dE, \text{ dato che } \alpha_v \gg \alpha_a \quad (4.50)$$

Il rendimento termico è dato da:

$$\frac{\delta L}{q} = \frac{\delta L}{L_e} = \frac{\alpha_v dE}{L_e} = \frac{dT}{T}$$

da cui si ricava:

$$dE = \frac{L_e}{\alpha_v T} dT \quad (4.51)$$

ossia:

$$\frac{dE}{E} = \frac{L_e}{E \alpha_v T} dT$$

Ma è $E \alpha_v = R_v T$, ossia $\alpha_v = \frac{R_v T}{E}$. Pertanto:

$$\frac{dE}{E} = \frac{L_e}{R_v T^2} dT \quad (4.52)$$

La relazione (4.52) è chiamata equazione di Clapeyron. Essa è stata ottenuta trascurando infinitesimi di ordine superiore e può considerarsi valida, purchè non si sia in prossimità della pressione critica E_c .

L'equazione di saturazione del vapore sopra il ghiaccio è analoga, quando si sostituisca a L_e il calore latente di sublimazione del ghiaccio L_s , somma del calore latente L_e e di quello di fusione F_f .

I valori dei calori latenti sono i seguenti (t espresso in $^{\circ}C$):

$$L_e = (2500 - 2.39t)10^3 \text{ joule kg}^{-1} = (597,30 - 0,57t)\text{Cal kg}^{-1}$$

Il coefficiente di t è quasi costante per $t > 0$; per $t < 0$ esso aumenta lentamente sino a raggiungere il valore di circa $0.70 \text{ Cal kg}^{-1} C^{-1}$ a $-60^{\circ}C$.

$$L_f = (324 + 2.19t)10^3 \text{ joule kg}^{-1} = (79.7 + 0.52t)\text{Cal kg}^{-1}$$

$$L_s = (2824 - 0.20t)10^3 \text{ joule kg}^{-1} = (677 - 0.05t)\text{Cal kg}^{-1}$$

L'integrazione approssimata della (4.52) per piccoli intervalli di temperatura, entro i quali possa ritenersi $L_e = \text{cost}$, conduce alla relazione:

$$E(T) = E(T_0) \exp \left[\frac{L_e}{R_v} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] \approx E(T_0) \exp \left[\frac{L_e}{R_v T_0^2} (T - T_0) \right] \quad (4.53)$$

Esprimendo la temperatura in $^{\circ}C$ e la pressione in mb , si ottiene:

$$E(t) \cong E_0 10^{0.434 \frac{L_e}{R_v T_0^2} t} = 6.1 \cdot 10^{0.0318 t} \quad (4.54)$$

in quanto, a $0^\circ C$, è $E_0 = E(0^\circ C) = 6.1 mb$

e:

$$0.434 \frac{L_e}{R_v T_0^2} = 0.434 \frac{597}{0.110 \cdot 273^2} = 0.0318 \quad (4.55)$$

Sul ghiaccio ($t < 0^\circ C$) la pressione di vapore saturo ha valori più bassi che non rispetto all'acqua soprafusa, dovendosi, nel primo caso, considerare il calore latente di sublimazione Fig. (4.5).

Nell'intorno di $0^\circ C$ E si raddoppia, grosso modo, per ogni aumento di 10 gradi di temperatura.

Per il calcolo di E si usa spesso in pratica la formula approssimata di Magnus:

$$E(t) = E_0 10^{\frac{at}{b+1}} \quad (4.56)$$

con $E_0 = 6.1 mb$ e con:

$$a = 7.5 \quad b = 237.3 \quad (\text{rispetto all'acqua})$$

$$a = 9.5 \quad b = 265.5 \quad (\text{rispetto al ghiaccio}).$$

4.8.2 – Trasformazioni infinitesimali adiabatiche per aria satura.

Applicando l'equazione della prima legge della termodinamica a una particella d'aria satura, esprimiamo il bilancio energetico fra il calore δq ricevuto dal sistema, il lavoro d'espansione $pd\alpha$ compiuto dal sistema, l'aumento di energia interna $c_v dT$ e la vaporizzazione di una certa quantità ds_m d'acqua ⁶. La nuova notazione “ s_m “ introdotta in questo paragrafo ha un valore piu' semantico che fisico: esso indica un processo termodinamico il quale in una sua fase intermedia o finale, raggiungera' una condizione che portera' l'umidita' specifica “ s ” al suo valore massimo (o di saturazione) “ s_m “.

Considerando però ora nuovamente un processo adiabatico relativo a un volume d'aria che si innalza, si può immaginare l'espansione di quest'ultimo come costituita da stadi infinitesimali successivi consistenti in:

- a) raffreddamento adiabatico per diminuzione della pressione, ma senza condensazione del vapore: in questo stadio si ha solo una diminuzione dell'energia interna.
- b) Condensazione, a $p = cost$, del vapore in eccesso.

Il vapore, condensandosi, cede la quantità di calore $L_e ds_m$, essendo L_e il calore latente di vaporizzazione e ds_m la variazione di umidità specifica dentro la particella, dovuta alla condensazione. Si ha pertanto, per la prima legge della termodinamica per un processo adiabatico “*saturo*”:

⁶ In questo caso, infatti, il calore fornito alla particella si ripartisce in: a) variazione di energia interna; b) lavoro di espansione; c) vaporizzazione di parte dell'acqua presente nella particella satura: ossia

$$\delta q = c_v dT + pd\alpha + L_e ds_m \quad (4.57)$$

$$c_v dT + p d\alpha + L_e ds_m = 0 \quad (4.58)$$

Applicando l'equazione di stato dell'aria satura, la (4.58) diviene:

$$c_p dT - R_d T_v \frac{dp}{p} + L_e ds_m = 0 \quad (4.59)$$

L'applicazione dell'equazione fondamentale della Statica (4.38a) permette di scrivere la (4.59) nel modo seguente:

$$c_p dT + \frac{gT}{T_e} dz + L_e ds_m = 0 \quad (4.60)$$

e di ottenere quindi la relazione:

$$\gamma_a' = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{c_p} \frac{T}{T_e} + \frac{L_e}{c_p} \frac{ds_m}{dz} \quad (4.61)$$

ossia:

$$\gamma_a' = \gamma_a + \frac{L_e}{c_p} \frac{ds_m}{dz} \quad (4.62)$$

La (4.62) rappresenta il lapse-rate adiabatico saturo. Da essa si vede che γ_a' è sempre minore di γ_a , poiché nella salita adiabatica della particella satura

l'umidità specifica diminuisce, ossia $\frac{ds_m}{dz} < 0$.

Piu' correttamente, va detto che nei processi saturi $\frac{ds_m}{dz}$ e' sempre negativo, anche per discesa adiabatica dell'aria. Infatti, nella discesa adiabatica dell'aria satura, si ha evaporazione della fase liquida (per cui $ds_m < 0$).

Un calcolo piu' approfondito permette di giungere a una forma piu' elaborata e precisa per γ'_a .

Ripartiamo dalla (4.62):

$$\gamma'_a = \gamma_a + \frac{L_e}{c_p} \frac{ds_m}{dz} \quad (a)$$

Ricordiamo che:

$$s_m = 0,622 \frac{E}{p} \quad (b)$$

Derivando logicamente la (b) si ottiene:

$$\frac{1}{s_m} \frac{ds_m}{dz} = \frac{1}{E} \frac{dE}{dz} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{E} \frac{dE}{dT_i} \frac{dT_i}{dz} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} \quad (c)$$

Ma:

$$\left(\frac{dT_i}{dz} \right)_{a.s.} = -\gamma'_a \quad (d)$$

e:

$$-\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = \frac{1}{p} \rho_e g = \frac{\rho_e g}{R_d T_e \rho_e} = \frac{g}{R_d T_e} \quad (\text{e})$$

Quindi:

$$\frac{ds_m}{dz} = 0,622 \left[\frac{E}{p} \left(\frac{g}{R_d T_e} - \frac{\gamma'_a}{E} \frac{dE}{dT_i} \right) \right] \quad (\text{f})$$

Introducendo la (f) nella (a), si ottiene

$$\gamma'_a = \gamma_a + 0,622 \frac{L_e}{c_p p} \left(\frac{g}{R_d T_e} - \frac{\gamma'_a}{E} \frac{dE}{dT_i} \right) \quad (\text{g})$$

Applicando l'equazione di Clapeyron $\frac{dE}{E} = \frac{L_e}{R_v T^2} dT$, ossia:

$$\frac{dE}{E} = \frac{L_e}{R_v T^2} dT$$

si ha la relazione cercata

$$\gamma'_a = \frac{\gamma_a + 0,622 \frac{L_e E g}{c_p R_d T_e}}{1 + 0,622 \frac{L_e E}{c_p p} \frac{dE}{dT_i}} \quad \text{ossia} \quad \gamma'_a = \gamma_a \frac{p + 0,622 \frac{L_e E}{R_d T_i}}{p + 0,622 \frac{L_e^2 E}{c_p R_d T_i^2}} \quad (\text{h})$$

Valori tipici di γ'_a in funzione della temperatura e della pressione atmosferica sono i seguenti (espressi in gradi Kelvin su 100 metri):

γ'_a a 1000mb (-60° C): 0,973 * (0° C): 0,658 * (+40° C): 0,315

γ'_a a 600mb (-60° C): 0,970 * (0° C): 0,557 * (+40° C): 0,270

Per concludere l'argomento dei processi adiabatici saturi, consideriamo i valori tipici che il lapse-rate può assumere nei casi pratici nell'atmosfera reale. La Fig. (4.5) presenta uno schema molto semplificato dei processi che hanno luogo in queste situazioni. Analisi piu' approfondite, sia dal punto di vista grafico sia da quello analitico verranno presentate e discusse piu' avanti, a partire dal par. 4.10.3.

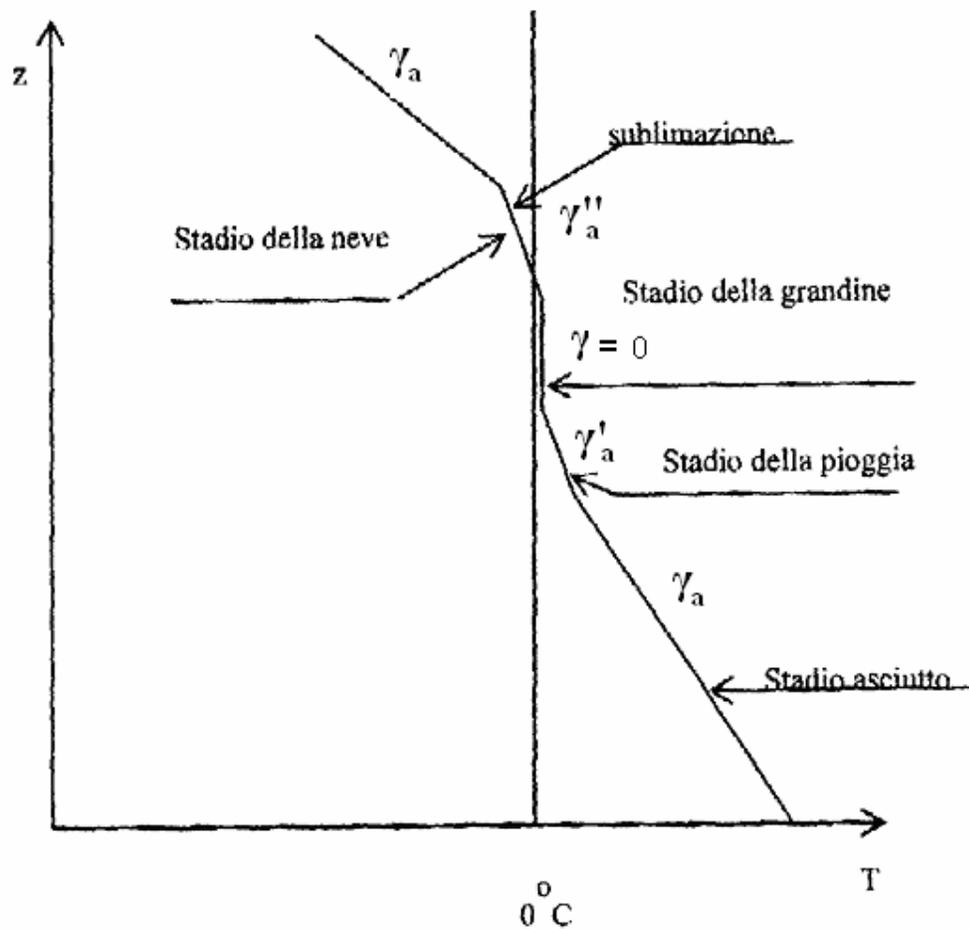


Fig. (4.5)

Di solito la particella d'aria, all'inizio della sua ascesa, è abbastanza lontana dalla saturazione e quindi il suo raffreddamento è dato dalla legge adiabatica secca (stadio asciutto). Una volta raggiunto il livello di condensazione, ha inizio la trasformazione del vapore in eccesso in goccioline d'acqua che, a mano a mano che si formano

Proseguendo nel suo innalzamento, la temperatura della particella scende a 0 °C (punto triplo dell'acqua); la goccioline d'acqua cominciano allora a congelarsi (almeno in teoria), per cui viene ceduto all'aria circostante il calore latente di fusione. Poiché tutta l'acqua deve congelarsi a questa temperatura, l'aria non potrà raffreddarsi ulteriormente finché non è completato il congelamento.

Questo è rappresentato dal tratto verticale della curva (stadio grandine). Dopo che tutta l'acqua è diventata ghiaccio, e la temperatura ha ripreso a scendere abbassandosi molto al di sotto della soglia di congelamento, il vapor d'acqua che è rimasto sublima direttamente nella fase solida. Questa parte del processo è rappresentata dallo stadio cosiddetto "della neve" e prosegue, a mano a mano che l'elemento sale, finché tutto il vapore è sublimato; dopo di ciò, il processo riprende l'andamento adiabatico secco.

4.8.3 – Processi pseudo-adiabatici.

Accanto ai processi adiabatici umidi, caratterizzati dal fatto che tutta l'umidità condensatasi durante l'ascesa resta (almeno teoricamente) entro la particella d'aria, occorre considerare i processi cosiddetti *pseudo-adiabatici*, definiti come i processi adiabatici dell'aria satura, nei quali l'umidità condensata viene (più realisticamente) persa dalla particella d'aria sotto forma di

precipitazione. La curva di stato di una particella soggetta a un processo pseudo-adiabatico prende il nome di curva *pseudo-adiabatica*.

Mentre nell'ascesa di una particella la curva adiabatica e quella pseudo-adiabatica non differiscono se non minimamente l'una dall'altra, durante la discesa si manifesta invece una differenza fondamentale. Infatti, il processo adiabatico saturo, nel corso del quale la particella trattiene al suo interno l'umidità condensata, è reversibile, in quanto la particella discendente ripercorre la stessa curva adiabatica satura della salita (con l'acqua che rievapora, contribuendo a far diminuire il rateo di riscaldamento per compressione adiabatica dell'aria). Invece, il processo pseudo-adiabatico è irreversibile, in quanto la particella sale lungo una pseudo-adiabatica e, dopo avere perso l'umidità condensata, scende lungo un'adiabatica non satura, ritornando così al livello iniziale a una temperatura più elevata di quella che aveva quando era partita.

In un processo pseudo-adiabatico, la temperatura potenziale non si conserva più; se però si introduce il concetto di temperatura pseudo-potenziale, definita come la temperatura di una particella d'aria sollevata pseudo-adiabaticamente fino alla completa condensazione del vapore (con perdita di tutta l'umidità condensata) e quindi riportata a 1000 mb in modo adiabatico *secco*, si vede immediatamente che questa nuova temperatura si conserva sia nei processi adiabatici, sia in quelli pseudo-adiabatici [vedi §4.10.3].

4.9 – Stabilità atmosferica relativa ai processi adiabatici saturi e adiabatici non saturi.

Quando una particella d'aria contiene umidità alla saturazione, la stabilità deve essere esaminata anche rispetto ai processi adiabatici saturi. Come nel caso non saturo, sono possibili anche per l'aria satura tre casi differenti di stratificazione atmosferica:

- 1) $\gamma_e > \gamma'_a$ - instabile satura
- 2) $\gamma_e = \gamma'_a$ - indifferente satura
- 3) $\gamma_e < \gamma'_a$ - stabile satura

Tenendo però presenti entrambi i processi adiabatici saturi e non saturi, abbiamo le seguenti cinque classificazioni:

- 1) $\gamma_e > \gamma_a > \gamma'_a$ instabile *secca* e satura, o assolutamente instabile
- 2) $\gamma_a = \gamma_e > \gamma'_a$ indifferente *secca* e instabile satura
- 3) $\gamma_a > \gamma_e > \gamma'_a$ stabile *secca* ma instabile satura, o condizionalmente stabile
- 4) $\gamma_a > \gamma_e = \gamma'_a$ stabile *secca* e indifferente satura
- 5) $\gamma_e < \gamma'_a < \gamma_a$ stabile *secca* e satura, o assolutamente stabile

Nel caso di stratificazioni condizionalmente stabili, una particella che sale in uno strato basso è inizialmente più fredda dell'aria circostante; oltre un certo livello z (di condensazione), la particella tende a divenire più calda dell'aria circostante. Questo punto verrà approfondito al successivo § 4.11 (Modello dello strato).

In questi casi l'atmosfera è detta stabile per piccoli impulsi e instabile per grossi impulsi. Consideriamo ora lo spostamento verticale di uno strato d'aria, caratterizzato da stabilità iniziale assoluta, la cui umidità relativa decresce dalla regione inferiore a quella superiore. Ad un certo punto della risalita, comincerà il processo di condensazione nella parte inferiore dello strato, che comincerà a raffreddarsi secondo la legge adiabatica saturata. La parte superiore dello strato si raffredderà, invece, secondo la legge adiabatica secca. Quando anche la parte superiore dello strato avrà iniziato la condensazione, la sua temperatura sarà più bassa di quella dello strato inferiore, ossia sarà instabile umida. Questo caso prende il nome di instabilità convettiva.

4.10 – Temperature convenzionali per i processi che conducono a saturazione dell'aria

Tra le temperature convenzionali abbiamo già definito la *temperatura virtuale* (vedi § 3) e la *temperatura potenziale* (vedi § 4.6 e 4.7).

Introduciamo ora le altre temperature convenzionali in uso in meteorologia. Nella Fig. (4.6) è riprodotto lo schema semplificato del nomogramma di Stüwe, che è quello in uso nel Servizio Meteorologico Italiano per lo studio dello stato termodinamico dell'atmosfera, al quale si fa riferimento per determinare (per via grafica) partendo dai dati iniziali di temperatura di rugiada (vedi in seguito), le altre temperature convenzionali che definiremo via via nel corso del presente paragrafo.

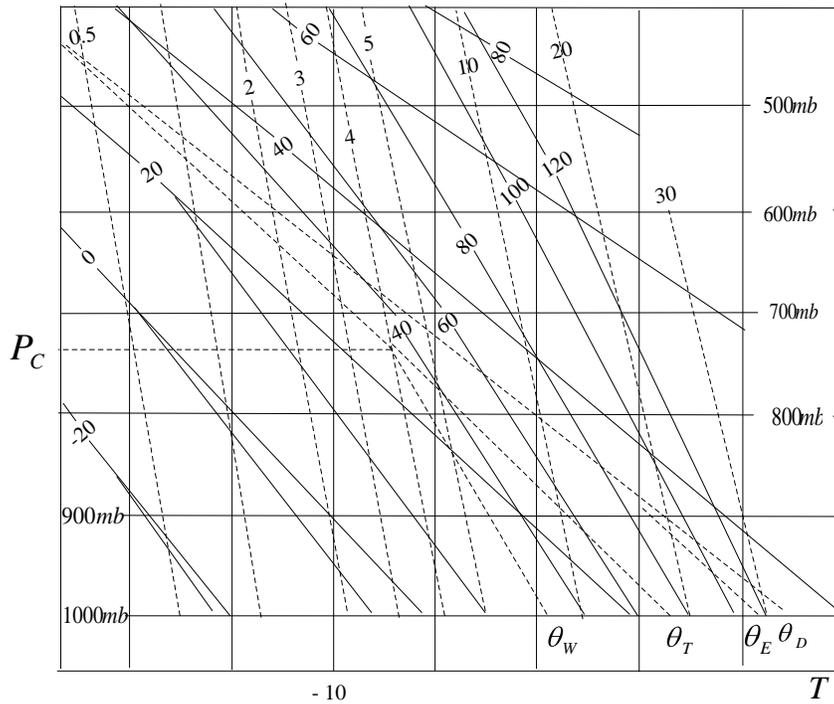


Fig. (4.6)

4.10.1 – Temperatura [T_w] di bulbo bagnato.

La temperatura di bulbo bagnato è definita come la temperatura che acquisterebbe una data massa d'aria quando, seguendo un processo adiabatico a pressione costante, venisse portata alla saturazione per evaporazione di acqua a spese del calore ceduto dall'aria stessa [$\delta q = dp = 0$; $ds_m > 0$].

Questa temperatura è approssimativamente quella che assumerebbe una massa d'aria che venisse portata alla saturazione per evaporazione di pioggia cadente in essa.

La temperatura di bulbo bagnato viene direttamente misurata quale temperatura di equilibrio raggiunta da un termometro ventilato il cui bulbo sia mantenuto bagnato da una garza imbevuta di acqua distillata. In tale processo

si trascura la capacità termica dell'acqua in evaporazione rispetto al calore latente. In condizioni di equilibrio, il calore fornito al bulbo dall'aria (continuamente rinnovantesi) eguaglia il calore sottratto al bulbo stesso dall'evaporazione dell'acqua. La temperatura raggiunta dal termometro corrisponde alla temperatura di bulbo bagnato prima definita, in quanto si ammette che, in condizioni di equilibrio, l'aria a contatto con il bulbo bagnato diventi satura per evaporazione in essa di acqua dal bulbo, e si porti alla temperatura del bulbo stesso.

L'equazione (4.60) applicata ad un processo isobaro ($dp = 0$), diviene:

$$c_p dT = -L_e ds_m \quad (4.63)$$

Partendo da uno stato di temperatura T e umidità specifica s_m , cerchiamo di determinare la temperatura T_w e l'umidità specifica $S_m(T_w)$, corrispondente alla saturazione prodotta dal vapor d'acqua che viene raggiunto per evaporazione dell'acqua.

La (4.63), integrata, diviene:

$$c_p (T_w - T) + L_e [S_m(T_w) - s_m] = 0 \quad (4.64)$$

cioè:

$$T_w = T - \frac{L_e}{c_p} [S_m(T_w) - s_m] \quad (4.65)$$

La (4.65) mostra che la temperatura T_w viene raggiunta con uno spostamento lineare [nel piano (S_m, T)], con coefficiente angolare negativo dato da $-\frac{L_e}{c_p}$.

Il primo termine della (4.64) rappresenta il calore sottratto all'aria, mentre il secondo termine da' la quantità di vapore formato.

Il processo può considerarsi isentropico. In realtà c'è un piccolo aumento di entropia che è dato dalla differenza tra l'aumento di entropia dell'aria per effetto della saturazione alla temperatura T_w e la diminuzione di entropia a causa del raffreddamento da T a T_w . Cioè:

$$\Delta S = \frac{L_e [S_m(T_w) - s_m]}{T_w} - c_p \int_{T_w}^T \frac{dT}{T} = c_p \frac{T - T_w}{T_w} - c_p \int_{T_w}^T \frac{dT}{T}$$

ossia:

$$\Delta S = c_p \left(\frac{T - T_w}{T_w} - \ln \frac{T}{T_w} \right)$$

Effettuando uno sviluppo in serie (approssimato) di $\ln \frac{T}{T_w}$ si ottiene:

$$\Delta S = \frac{1}{2} c_p \left(\frac{T - T_w}{T_w} \right)^2$$

dove si e' indicata l'entropia specifica (per unita' di massa) con la lettera S (anziche' s) per evitare confusione con l'umidita' specifica s e s_m .

Poiché $T - T_w \ll T_w$, l'incremento di entropia può ritenersi trascurabile.

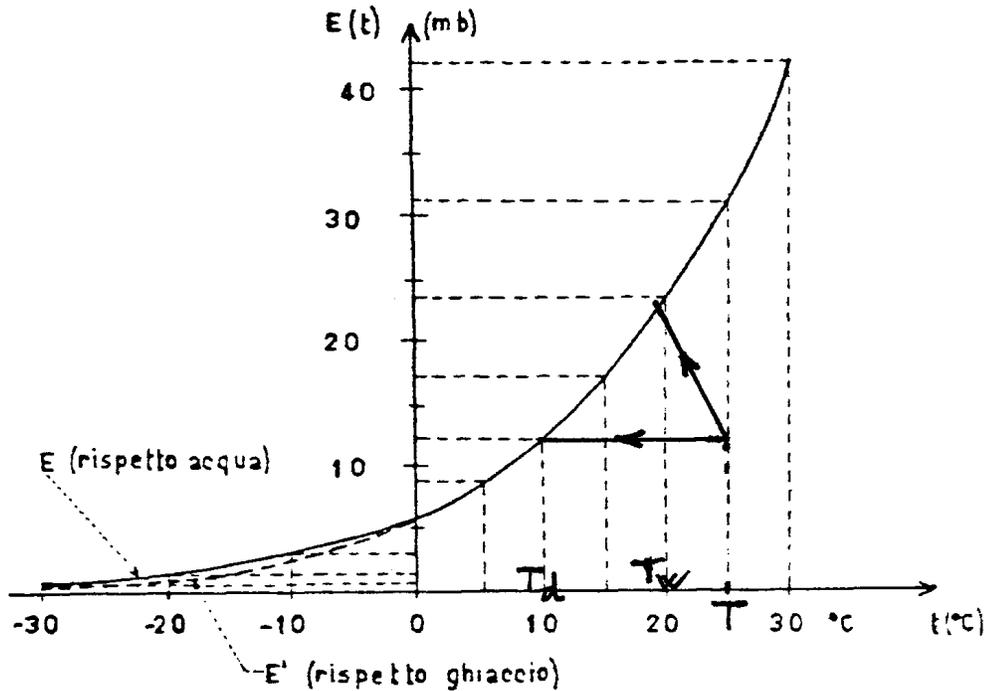


Fig (4.6a)

4.10.2 – Temperatura $[T_d]$ di rugiada (o di dew-point).

La temperatura di rugiada (T_d) è la temperatura alla quale si deve raffreddare l'aria perché essa diventi satura rispetto all'acqua, mantenendo costanti la pressione e l'umidità specifica [$dp = 0$; $ds_m = 0$; $dq < 0$]

Ricaviamo la relazione che lega la temperatura di rugiada a quella di bulbo bagnato. Si osserva, con riferimento alla Fig. (4.6a), che nel processo che porta l'aria alla temperatura T_w di bulbo bagnato, mentre la temperatura T

dell'aria si va abbassando, si eleva la temperatura di rugiada T_d , per l'accrescersi del contenuto di vapore, finchè le due si identificano nella

$$T_w = T_d = T .$$

Dalla (4.65), tenuto conto che è $s_m = S_m(T_d)$ e che, a $p = cost$, è:

$$\frac{dS_m}{S_m} = \frac{dE}{E} = \frac{L_e}{R_v T^2} dT \quad (\text{vedi 4.52})$$

si ricava:

$$T_w = T - \frac{L_e}{c_p} [S_m(T_w) - S_m(T_d)] = T - \frac{L_e}{c_p} \Delta S_m = T - \frac{L_e}{c_p} \bar{S}_m \frac{L_e}{R_v T^2} (T_w - T_d)$$

essendo \bar{S}_m un valore medio nell'intervallo $T_w - T_d$.

Ponendo $\sigma = \frac{L_e^2}{R_v c_p T^2} \bar{S}_m$ si ha:

$T_w = T - \sigma(T_w - T_d)$, da cui:

$$T_w = \frac{T + \sigma T_d}{1 + \sigma}$$

e:

$$T_d = T_w - \frac{T - T_w}{\sigma} \quad (4.66)$$

Si ha inoltre:

$$T_w - T_d = \frac{T - T_d}{1 + \sigma}$$

La (4.66) consente di calcolare la T_d dai valori di osservazione diretta di T e T_w .

E' da segnalare però che, per definire lo stato termico e igrometrico dell'atmosfera, vengono trasmessi nei messaggi meteorologici i valori di T e T_d .

Il valore approssimato di σ è:

$$\sigma = \frac{L_e^2}{R_v c_p} \frac{\bar{S}_m}{T^2} \cong \frac{36 \cdot 10^4}{0.11 \cdot 0.24} \frac{\bar{S}_m}{T^2} = 1.35 \cdot 10^7 \frac{\bar{S}_m}{T^2}$$

Esprimendo l'umidità specifica in gr/kg (\bar{S}_m) e ponendo $T = 300 K$, si ha:

$$\sigma \cong \frac{1.35 \cdot 10^4}{9 \cdot 10^4} \bar{S}_m \cong 0.15 \bar{S}_m$$

Oltrepassando, nel raffreddamento, la temperatura di rugiada, si ha condensazione (con liberazione di calore latente); al suolo si verifica foschia e nebbia: in quota, si formano le nubi.

Vale grossolanamente la seguente tabella:

grammi di acqua condensata per Kg di aria	$10 = 10^1$	$1 = 10^0$	$0.1 = 10^{-1}$	$0.001 = 10^{-2}$
Visibilità in metri	$12 \cdot 5^0 = 12$	$12 \cdot 5^1 = 60$	$12 \cdot 5^2 = 300$	$12 \cdot 5^3 = 1500$

4.10.3 – Temperatura equivalente $[T_e]$ e temperatura equivalente potenziale $[g_e]$.

La temperatura equivalente $[T_e]$ è definita come la temperatura che acquisterebbe una massa d'aria se, adiabaticamente e a pressione costante $[\delta q = dp = 0 ; ds_m > 0]$, tutto il vapore in essa contenuto si condensasse e l'acqua condensata precipitasse via via che si forma.

E' un processo fisicamente impossibile.

Si ha:

$$\Delta Q_{aria} = \Delta Q_{cond}$$

ossia:

$$c_p (T_e - T) = L_e s_m ;$$

posto

$$\Delta T_e = T_e - T$$

è:

$$\Delta T_e = \frac{L_e}{c_p} s_m \cong \frac{600}{0.24} s_m = 2500 s_m = 2.5 s'_m$$

con s' esprimente l'umidità specifica in unita "ibride" (s'_m in g / kg).

Quindi:

$$T_e = T + 2.5 s'_m \quad (4.67)$$

Giacchè T_e si riferisce ad aria divenuta perfettamente secca, la temperatura *equivalente-potenziale* \mathcal{G}_e è definita come la temperatura potenziale di T_e . Si ha (vedi 4.40):

$$\mathcal{G}_e = T_e \left(\frac{1000}{p} \right)^k = \mathcal{G} + \frac{L_e}{c_p} s_m \left(\frac{1000}{p} \right)^k \quad (4.68)$$

4.10.4 – Temperatura *pseudo-equivalente* (T_p) e temperatura *pseudo-potenziale* (\mathcal{G}_p).

Sono temperature convenzionali che corrispondono a processi pseudo adiabatici saturi, ossia a processi nei quali l'aria perde, durante la sua ascesa al di sopra del livello di condensazione (Z_c , p_c), le fasi condensate dell'acqua (dapprima liquida e successivamente solida).

Con riferimento alla figura (4.7a), rappresentiamo un processo termodinamico che si compone di una successione di processi di raffreddamento adiabatico sia non saturi (γ_a) sia saturi (γ'_a, γ''_a), dove γ'_a e' il "lapse rate" adiabatico saturo in presenza delle due fasi (vapore e acqua) all'equilibrio e γ''_a e' il "lapse rate" adiabatico saturo in presenza delle due fasi (vapore e ghiaccio) all'equilibrio.

Si e' anche indicato un tratto di trasformazione $\gamma = 0$ che rappresenta la condizione di presenza delle tre fasi dell'acqua (vapore, liquido e solido) all'equilibrio, detta anche "punto triplo" dell'acqua. Tale successione di processi e' rappresentata in maggiore dettaglio nella Fig. (4.7b) .

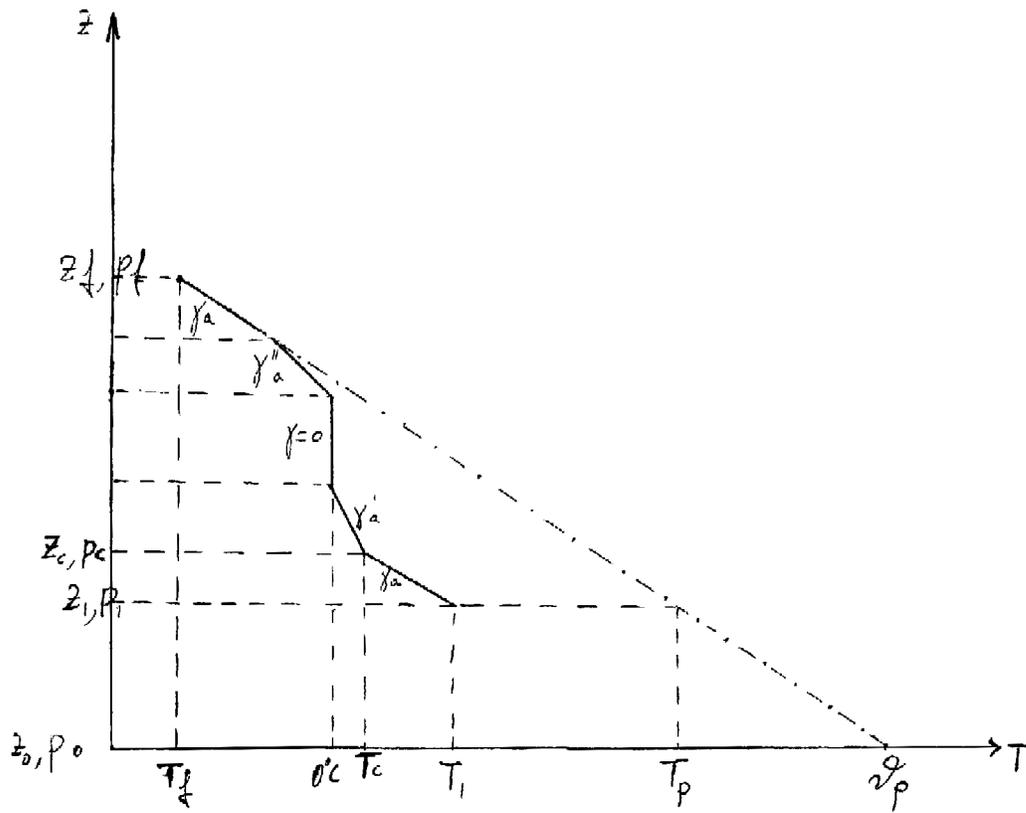


Fig (4.7a)

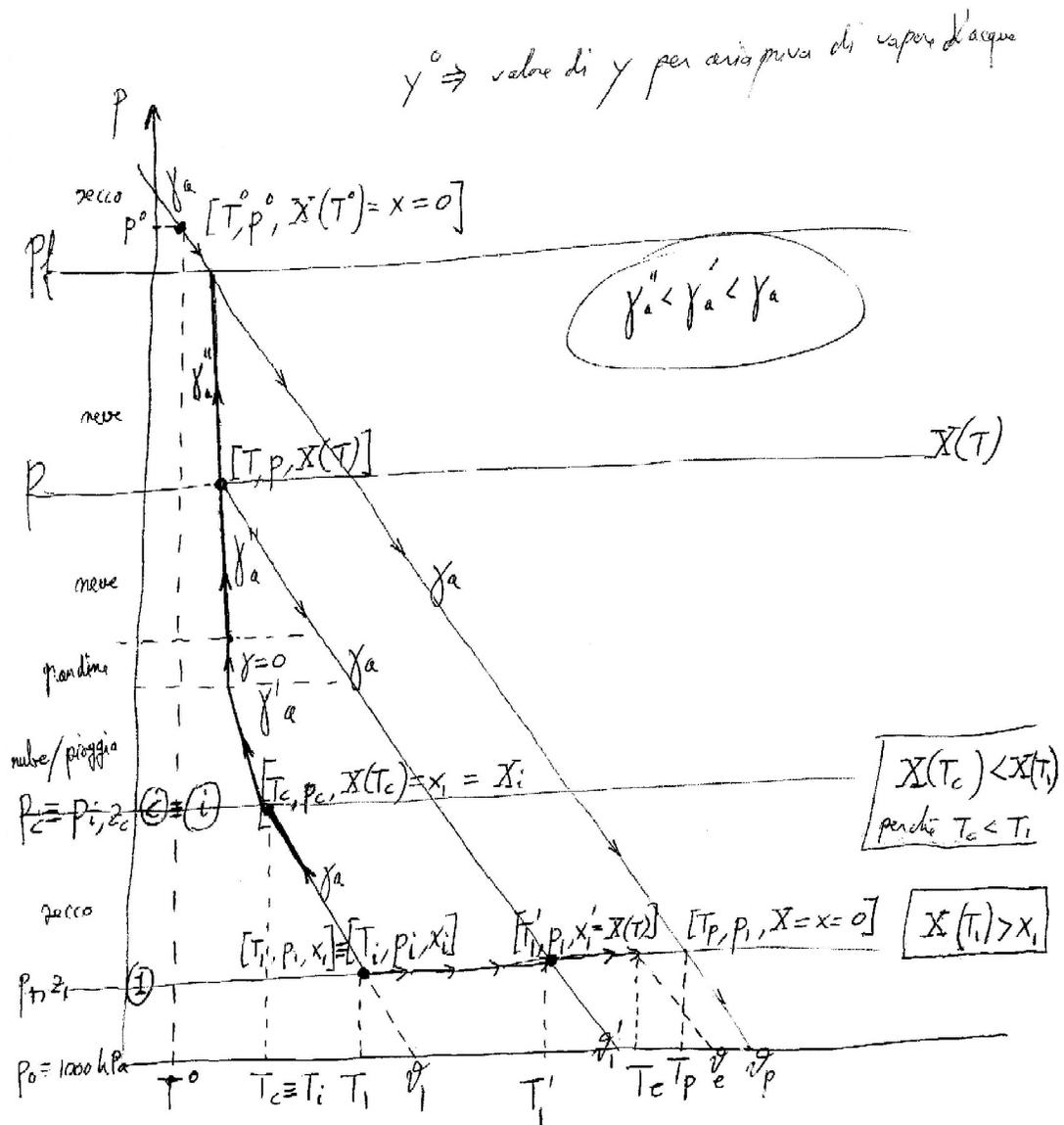


Fig. (4.7b)

Per calcolare i valori delle temperature di nostro interesse, però, faremo riferimento a un diagramma termodinamico semplificato rappresentato dalla

Fig. (4.7c), nel quale i processi adiabatici saturi durante l'innalzamento sono rappresentati da un *lapse-rate* medio $\langle [\gamma'_a + \gamma''_a] \rangle$, mentre il tratto a *lapse-rate* nullo ($\gamma = 0$) non viene considerato.

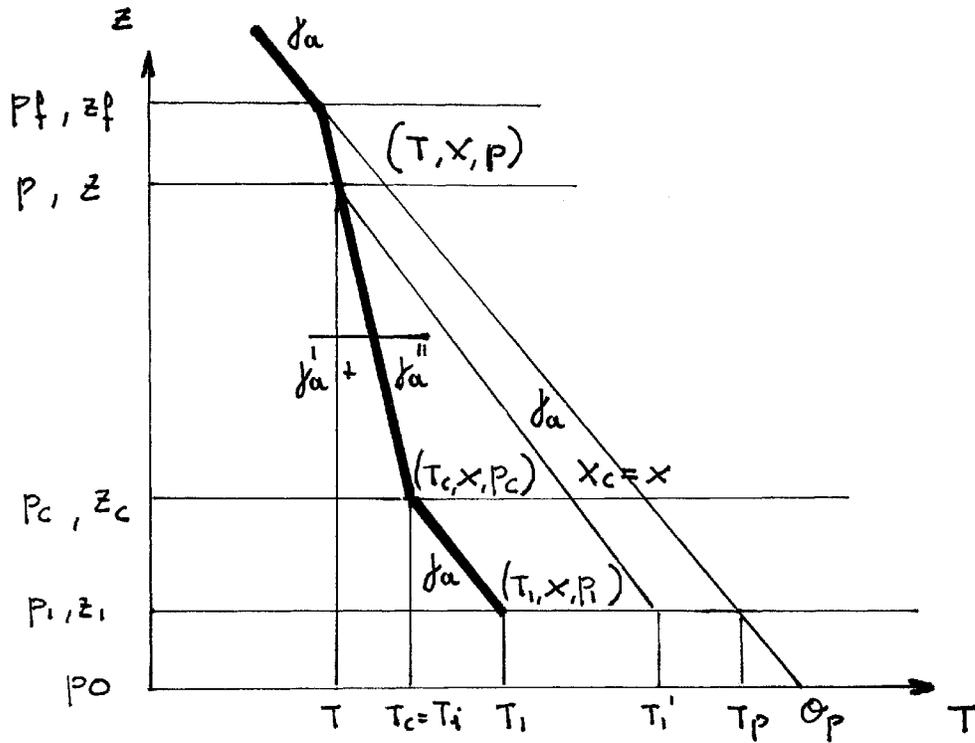


Fig. (4.7c)

Al livello iniziale p_l l'aria possiede la temperatura T_l e il rapporto di mescolanza x . Si immagina di sollevare una particella di questa aria seguendo un processo adiabatico secco fino al livello di condensazione p_c . La temperatura T_c a cui si verifica la saturazione è data da [vedi § 4.5 e equazione (4.36)]:

$$T_c = T_1 \left(\frac{p_c}{p_1} \right)^k \quad (4.69)$$

A questo livello (p_c) il mixing ratio (di saturazione) è $X_c = x$ (in quanto non si è ancora avuto alcun passaggio di stato).

Al di sopra di Z_c , l'aria inizia un processo adiabatico saturo, partendo da (t_c , $X_c = x$, p_c) e arrivando al generico (T , X , p).

Si sollevi ulteriormente l'aria (ormai satura) sino alla pressione finale p_f , supponendo che l'acqua condensata precipiti a mano a mano che si forma (il che rende il processo irreversibile o pseudo adiabatico) e, da questo livello, ritorniamo idealmente, con una trasformazione adiabatica non satura, al livello del suolo (indicato come z_0 , p_0) e immaginato, quest'ultimo, coincidente con il livello del mare [il che significa che p_0 coincide con p_s]. Calcoleremo le variazioni di temperatura dell'aria che subisce questa serie di trasformazioni imponendo che il processo, almeno durante la salita, si comporti come se fosse reversibile, ossia conservasse l'entropia totale. Questa condizione è accettabile nella fase di salita dell'aria, essendo $c_1 \ll c_p$.

Per rendere più evidente le varie fasi della trasformazione, abbiamo creato, come si era già detto, anche la Fig. (4.7b), che è più dettagliata della Fig. (4.7a), ma che non è stata utilizzata per la valutazione quantitativa delle varie fasi del processo termodinamico.

Per il calcolo delle varie temperature utilizzeremo infatti uno schema ancora più semplificato [quello della Fig. (4.7c)], più idoneo a fare risaltare i punti più significativi della trasformazione.

$$T = T_c \left(\frac{p}{p_c} \right)^k \exp \frac{1}{c_p} \left[x \frac{L_{ec}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right] = T_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^k \exp \frac{1}{c_p} \left[x \frac{L_{ec}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right] \quad (4.70)$$

Ricordando l'espressione che lega la temperatura dell'aria alla pressione in un processo adiabatico:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R_d}{c_p}} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p}} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^K = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{0,286} \quad (4.71)$$

si ha, per la temperatura al livello di condensazione:

$$T_c = T_1 \left(\frac{p_c}{p_1} \right)^K \quad (4.72)$$

avendo assunto come stato iniziale (p_1, z_1) .

Sopra Z_c , l'aria inizia un processo adiabatico saturo, partendo da (T_c, X_c, x, p_c) e arrivando al generico (T, X, p) .

La temperatura T si calcola in base al principio di conservazione dell'entropia, supponendo che il processo adiabatico sia anche reversibile (nonostante la perdita di acqua). Ma $a c_l \ll c_p$, per cui con questa ipotesi non si introduce un errore significativo.

4.10.4a - Variazione dell'entropia in un processo adiabatico saturo.

Definiamo l'entropia specifica $s = \frac{S}{m}$ con l'entropia riferita all'unita' di massa e calcoliamo le variazioni delle singole componenti (s_d, s_v, s_{vs}, s_l , ecc.)

dell'entropia dell'aria non satura, del vapor d'acqua non saturo, del vapor d'acqua saturo, dell'acqua ecc. Purtroppo, i due simboli s e S attribuiti a questa nuova grandezza si confondono con quelli dell'umidità specifica in aria non satura e in aria satura.

1 - Variazione ds_d di s per aria non satura nell'espansione verticale

$$(p_1 \rightarrow p_2, T_1 \rightarrow T_2)$$

$$s_d = \frac{S_d}{m_d} = \text{entropia specifica dell'aria secca} \quad (4.73)$$

$$ds_d = \frac{\delta q_d}{T} = \frac{C_{p_d} T - R_d T \frac{dp_d}{p_d}}{T} = C_p \frac{dT}{T} - R_d \frac{dp_d}{p_d} = C_p \frac{dT}{T} - R_d \frac{dp_d}{p_d} \quad (4.74)$$

collegato al raffreddamento dell'aria

$$s_{d_2} - s_{d_1} = c_p \ln \frac{T_2}{T_1} - R_d \ln \frac{p_{d_2}}{p_{d_1}} \quad (4.75)$$

2 - Variazione ds_l di s_l per l'acqua che si raffredda nell'espansione verticale

$$(p_1 \rightarrow p_2, T_1 \rightarrow T_2)$$

$$s_l = \frac{S_d}{m_d} = \text{entropia specifica della fase liquida dell'acqua} \quad (4.76)$$

$$ds_l = \frac{\delta q_l}{T} = c \frac{dT}{T} \quad (4.77)$$

da cui si ottiene la variazione di entropia dell'acqua dovuta al suo raffreddamento

$$s_{l_2} - s_{l_1} = c_l \ln \frac{T_2}{T_1} \quad (4.78)$$

con:

c_l = calore specifico dell'acqua

3 - Variazione $(\Delta s)_{evaporazione}$ per formazione di vapore saturo nella fase di evaporazione durante il moto verticale

$$s_{vs} = \frac{S_{vs}}{m_{vs}} \quad \Delta s_{evap} = \frac{\Delta S_{evap}}{m_{vs}} \quad s_{vs} = \frac{S_l}{m_{vs}} + \frac{\Delta S_{evap}}{m_{vs}} \quad (4.79)$$

$S_{vs} = (S_l)_{\text{dell'acqua da cui proviene}} + (\Delta s_l)_{\text{evaporazione}}$

$(\Delta s_l)_{\text{evaporazione}} = \Delta s_l = \frac{L_e}{T}$ per 1 kg di acqua nel percorso di produzione di vapore alla saturazione

$$c_p = 1003 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad c_v = 716 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad c_l = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (4.79a)$$

$$c_{pv} = 1846 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad c_{vv} = 1385 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Sia ora m la massa in kg di aria satura:

$$m = m_d + m_l + m_{vs} = m_d + m_a \quad (4.80)$$

$$\text{con } m_a = m_l + m_{vs} = \text{acqua totale (goccioline + vapore saturo)} \quad (4.80a)$$

Normalizzando anche m con m_d (massa del gas atmosferico non saturo), si ottiene:

$$\frac{m}{m_d} = 1 + \frac{m_l}{m_d} + \frac{m_{vs}}{m_d} = 1 + \frac{m_a}{m_d} = 1 + a \quad (4.81)$$

avendo posto:

$$a = \frac{m_a}{m_d} = X + \frac{m_l}{m_d} \quad (4.81a)$$

e ricordando che:

$$X = \frac{m_{vs}}{m_d}$$

Si puo' scrivere quindi, per l'entropia della massa d'aria m :

$$S_{(m)} = m_d s_d + m_l s_l + m_{vs} s_{vs} = m_d s_d + m_l s_l + m_{vs} (s_l + \Delta s_{evap}) \quad (4.82)$$

$$(S_d) + (S_e) + (S_{vs} + \Delta S_{evap}) \quad (4.82a)$$

$$\frac{S_{(m)}}{m_d} = s_d + \frac{m_e}{m_d} s_e + \frac{m_{vs}}{m_d} s_{vs} = s_d + \frac{m_l}{m_d} s_e + X (s_l + [\Delta s_l]) =$$

$$s_d + \left(\frac{m_l}{m_d} + X \right) s_e + X [\Delta s_e]_{evap} = s_d + a s_e + X [\Delta s_e]_{evap} = \text{cost} \quad (4.82b)$$

ossia, con riferimento adesso alla temperatura satura da $(T_c, X_c = x, p_c)$ a (T, X, p) :

$$s_{d_c} + a s_{l_c} + X_c \Delta s_{l_c} = s_d + a s_l + X \Delta s_l = \text{cost} \quad (4.82c)$$

da cui

$$s_d + a s_l + X \Delta s_l - s_{d_c} - a s_{l_c} - X_c \Delta s_{l_c} = 0 \quad (4.82d)$$

ovvero, ponendo $p_d = p$ e sostituendo le entropie specifiche trovate:

$$c_p \ln \frac{T}{T_c} - R_d \ln \frac{p}{p_c} + a c_l \ln \frac{T}{T_c} + X \frac{L_e}{T} - X_c \frac{L_{e_c}}{T_c} = 0 \quad (4.82e)$$

ossia ancora:

$$\ln \frac{T}{T_c} (c_p + a c_l) - R_d \ln \frac{p}{p_c} + X \frac{L_e}{T} - X_c \frac{L_{e_c}}{T_c} = 0$$

da cui:

$$\ln \frac{T}{T_c} = \frac{R_d}{c_p + ac_l} \ln \frac{p}{p_c} + \frac{1}{c_p + a_{c_l}} \left(X_c \frac{L_{e_c}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right) \quad (4.83)$$

essendo:

$$ac_l = \frac{m_a}{m_d} c_l \quad c_p = \frac{m_d}{m_d} c_p = c_p$$

dal momento che le varie grandezze sono state tutte normalizzate rispetto alla massa m_d della componente non satura dell'aria [equazioni da (4.81) a (4.82)] e ricordando i valori di c_p e c_l citati precedentemente [Equazioni 4.79a)], possiamo porre⁷ :

$ac_l \ll c_p$, con il che l'equazione (4.83) diviene:

$$\ln \frac{T}{T_c} - \frac{R_d}{c_p} \ln \frac{p}{p_c} \cong \frac{1}{c_p} \left[X_c \frac{L_{e_c}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right] \quad (4.84)$$

ossia:

⁷ questa diseuguaglianza proviene da : $\frac{m_a}{m_d} c_l \ll \frac{m_d}{m_d} c_p$ ossia : $ac_l \ll cp$

$$\ln \left\{ \frac{\frac{T}{T_c}}{\left(\frac{p}{p_c}\right)^{\frac{R_d}{c_p}}} \right\} = \frac{1}{c_p} \left[X_c \frac{L_{e_c}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right] \quad (4.84a)$$

da cui:

$$\frac{T}{T_c} = \left(\frac{p}{p_c}\right)^{\frac{R_d}{c_p}} \exp \left\{ \frac{1}{c_p} \left[X_c \frac{L_{e_c}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right] \right\} = \left(\frac{p}{p_c}\right)^{\frac{R_d}{c_p}} \exp \left[\frac{1}{c_p} \left(x \frac{L_{e_c}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right) \right] \quad (4.84b)$$

Per inciso, si osserva che quest'ultima relazione, in “aria secca”

($X_1 = X = 0$), diviene l'equazione di Poisson:

$$\frac{T}{T_1} = \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{R_d}{c_p}}$$

Sostituendo nella (4.84b), a T_c il suo valore

$$T_c = T_1 \left(\frac{p_c}{p_1}\right)^k$$

si ha:

$$T = T_1 \left(\frac{p}{p_1}\right)^k \exp \left[\frac{1}{c_p} \left(x \frac{L_{e_c}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right) \right] \quad (4.84c)$$

Riportando l'aria al livello iniziale p_1 , con un processo adiabatico secco, si avra'

$$T_1' = T \left(\frac{p_1}{p} \right)^K = T_1 \exp \frac{1}{c_p} \left(x \frac{L_{e_c}}{T_c} - X \frac{L_e}{T} \right) \quad (4.84d)$$

T_1' e' maggiore di T_1 perche' $x > X$ (in quanto $T < T_1$ ed e' stata persa la fase condensata)

Facendo proseguire invece il processo adiabatico saturo (pseudo-adiabatico) fino alla completa eliminazione dell'acqua ($X=0$) e riportando l'aria al livello p_1 con un'adiabatica secca, si avra' la temperatura pseudo-equivalente T_p (detta anche di Rossby)

$$T_p = T_1 \exp \frac{1}{c_p} \frac{x L_{e_c}}{T_c} \quad (4.84e)$$

e, scendendo poi ancora a $p_0 = 1000$ hPa, si raggiungera' la temperatura pseudo-potenziale \mathcal{G}_p , la cui espressione e':

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_p &= T_p \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^k = T_1 \left(\frac{p_0}{p_1} \right)^k \exp \left[\frac{x}{c_p} \frac{L_{e_c}}{T_c} \right] \cong \mathcal{G} \left[\exp \left(\frac{x}{c_p} \frac{L_{e_c}}{T_c} \right) \right] \cong \mathcal{G} \left[1 + \frac{x}{c_p} \frac{L_{e_c}}{T_c} \right] \cong \\ &\cong \mathcal{G} \left[1 + \frac{L_{e_c}}{c_p} \frac{s_m}{T_c} \right] = \mathcal{G} + \frac{L_e}{c_p} s_m \frac{\mathcal{G}}{T_c} = \mathcal{G} + \frac{L_{e_c}}{c_p} s_m T \left(\frac{1000}{p} \right)^k \frac{1}{T_c} \cong \end{aligned}$$

$$\cong \mathcal{G} + \frac{L_{e_c}}{c_p} s_m \left(\frac{1000}{p} \right)^k = \mathcal{G}_e \quad (4.85)$$

- \mathcal{G}_e e' un invariante Lagrangiano (costante del moto) per processi adiabatici non saturi e pseudo-adiabatici saturi. \mathcal{G}_e Puo' essere usato come tracciante di masse d'aria che nel loro moto non hanno subito riscaldamenti e miscelamenti con altre masse d'aria.

- \mathcal{G}_p si conserva nei processi pseudo-adiabatici.

Incontreremo piu' avanti la temperatura convenzionale T_e (temperatura equivalente) che si puo' pensare di ottenere estraendo, con un processo adiabatico e isobarico, tutto il vapore d'acqua contenuto nell'aria. Si tratta di un processo fisicamente irrealizzabile ma facilmente descrivibile partendo dal primo principio della Termodinamica per trasformazioni sature e utilizzando il tratto a $ds_m < 0$ della trasformazione che da' la temperatura di bulbo bagnato T_w .

La temperatura T_p e' $>$ di T_e , ma di poco .

Se sviluppiamo in serie l'espressione $\exp \frac{xL_{e_c}}{c_p T_e}$, otteniamo:

$$\exp \frac{xL_{e_c}}{c_p T_e} \approx \left(1 + \frac{xL_{e_c}}{c_p T_e} + \dots \right), \text{ da cui:}$$

$$T_p = T_1 \left(1 + \frac{xL_{e_c}}{c_p T_c} + \dots \right) \approx T_1 + \frac{T_1}{T_c} \frac{xL_{e_c}}{c_p} \approx T_1 + \frac{s_m L_{e_c}}{c_p} = T_e$$

essendo $T_1 \approx T_c$

T_p e' $> T_e$ perche' i termini trascurati dello sviluppo sono tutti positivi

T_1' e' invece maggiore di T_1 perche' $x > X$ (in quanto $T < T_1$)

Ciò risulta evidente anche per altra via. Si differenzi a $p = \text{cost}$ la (4.39). Si ottiene:

$$d\mathcal{G} = dT \left(\frac{1000}{p} \right)^k$$

Cioè, a parità di incremento dT di temperatura, l'incremento di temperatura potenziale aumenta col diminuire della pressione.

4.10.5 – La temperatura potenziale di bulbo bagnato.

E' opportuno definire una funzione di T e q che differisce assai poco dalla temperatura di bulbo bagnato T_w .

Si pensi di sollevare l'aria dal livello iniziale p_1 , dove ha la temperatura T , sino al livello di condensazione p_c dove essa raggiunge la temperatura T_c . Si

riporti l'aria, divenuta satura, seguendo un processo adiabatico saturo sino alla pressione iniziale p_1 ; ciò presuppone che l'aria si arricchisca reversibilmente di vapore per evaporazione di acqua contenuta in essa [vedi Fig. (4.4)]. La temperatura raggiunta assume il nome di pseudo-temperatura di bulbo bagnato e differisce molto poco, come in precedenza detto, dalla temperatura di bulbo bagnato, per determinare la quale si suppone che l'umidificazione si verifichi a pressione costante, anziché variabile. In pratica le due temperature si possono considerare uguali. Se si ammette che l'aria venga portata, con ulteriore moto discendente a seguendo ancora un processo adiabatico saturo, alla pressione di 1000 mb , essa assumerà una temperatura ϑ_w , che è chiamata temperatura pseudo-potenziale di bulbo bagnato o, più brevemente, temperatura potenziale di bulbo bagnato.

4.11 – La stabilità atmosferica con il modello dello strato.

I criteri di stabilità precedentemente stabiliti con il modello particellare costituiscono, come s'è detto, una approssimazione della realtà fisica che, in certe situazioni, può divenire non soddisfacente.

E' quindi opportuno ricorrere ad un modello che meglio rappresenti le situazioni di equilibrio termodinamico che vengono a crearsi nell'atmosfera quando i suoi elementi fluidi cambiano le proprie posizioni relative lungo le coordinate verticali.

Il modello particellare poneva a confronto, ad un determinato livello z , la densità di un elemento fluido infinitesimo rispetto a quella dell'atmosfera circostante. Quest'ultima veniva considerata come ambiente esterno immobile, definito termodinamicamente dal preesistente profilo verticale di

temperatura, che rimaneva invariato durante il processo di innalzamento e espansione della particella.

Il modello dello strato tiene invece conto:

- a) del fatto che i volumi fluidi che si muovono verticalmente nell'atmosfera sono di dimensioni finite;
- b) dal fatto, conseguenza di a), che si sviluppano movimenti di compensazione che rimpiazzano l'aria, che si è spostata da un certo livello, con aria proveniente da un altro livello.

Si ha quindi che se la particella che subisce la trasformazione adiabatica è rappresentata da una massa (di volume finito) di aria ascendente, non potremo più considerare il fluido esterno come immobile, bensì dovremo tenere conto che una eguale massa d'aria dovrà scendere da un livello superiore e prendere il posto di quella che è salita. Nel fare ciò, la massa discendente subirà, anch'essa, un processo adiabatico, modificando conseguentemente il suo preesistente profilo verticale di temperatura.

Questa è la principale differenza fra i due modelli e, come vedremo, in alcuni casi di equilibrio *condizionale* può condurre a criteri di stabilità addirittura opposti. E' importante osservare, a questo proposito, che tale contraddizione non si verifica nei casi di stabilità o instabilità assoluta, per cui il modello particellare va considerato come una approssimazione meno adeguata alla realtà rispetto al modello dello strato, ma non un modello scorretto.

Le ipotesi su cui si basa il modello dello strato sono:

- a) l'atmosfera è inizialmente barotropica, cioè le superfici di pressione costante sono anche superfici di densità, cioè di temperatura virtuale, costante [vedi § 5];
- b) lo strato è molto ampio e sottile e si trascurano gli scambi orizzontali di massa attraverso le pareti verticali;

c) tutti i moti sono adiabatici e non si ha mescolanza tra l'aria delle colonne ascendenti e quella delle colonne discendenti.

Indichiamo Fig. (4.8) con S_A la superficie occupata dalle colonne di aria ascendente e con S_D quella occupata dalle colonne discendenti.

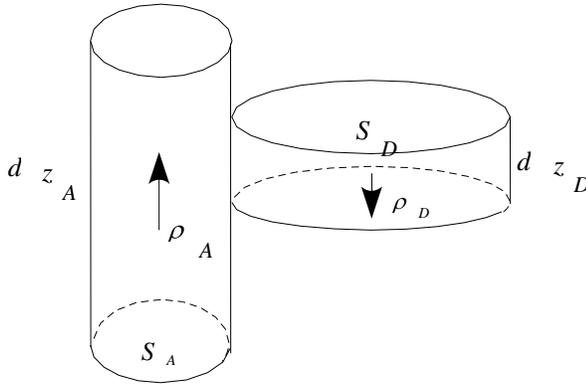


Fig. (4.8)

Dopo un tempo δt dall'istante iniziale le superfici S_A e S_B avranno percorso, rispettivamente, il dislivello δz_A verso l'alto (assunto come positivo) e il dislivello δz_D verso il basso (assunto come negativo). Dato che, per le ipotesi fatte, le masse d'aria che salgono e che scendono devono essere uguali, si ricava che:

$$\rho_A S_A \delta z_A^\uparrow = -\rho_D S_D \delta z_D^\downarrow$$

e poiché si è considerata l'atmosfera inizialmente barotropica, si può porre $\rho_A = \rho_D$ e pertanto:

$$S_A \delta z_A^\uparrow = -S_D \delta z_D^\downarrow$$

essendo $\delta z_D < 0$ e $\delta z_A > 0$

Pertanto, in intervalli di tempo uguali, l'aria che sale (rapportabile, nel presente modello, all'aria del volume elementare che effettua la trasformazione adiabatica nel modello particellare) e l'aria che scende (rapportabile all'aria ambiente – *ferma* – nel modello particellare) si spostano di livelli δz inversamente proporzionali alle sezioni delle colonne che esse formano.

Se $S_A \ll S_D, \delta z_D \rightarrow 0$ anche per valori elevati di δz_A , ossia l'aria ambiente resta praticamente immobile; questa situazione corrisponde a quella rappresentata dal modello particellare.

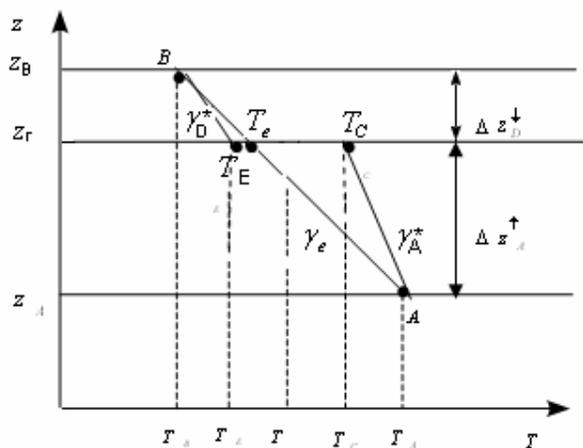


Fig. (4.9)

Se, con riferimento alla Fig. (4.9), T_C e T_E sono le temperature raggiunte al medesimo istante dall'aria che sale, provenendo da z_A , e dall'aria che scende, provenendo da z_B , al livello di riferimento z_r allora:

$$\Delta T = T_C - T_E = (T_A - \gamma_A^* \Delta z_A^\uparrow) - (T_B - \gamma_D^* \Delta z_D^\downarrow) \quad (4.86)$$

dove γ_A^* e γ_D^* sono i *lapse rate* di processo per l'aria ascendente e discendente rispettivamente. γ_A^* e γ_D^* possono essere sia riferiti ad aria secca, sia ad aria umida, sia ancora a processi pseudo-adiabatici. La (4.86) rappresenta la differenza di temperatura fra l'aria delle due colonne al medesimo livello.

Poiché:

$$T_B - T_A = -\gamma_e (\Delta z_A^\uparrow - \Delta z_D^\downarrow)$$

e

$$\Delta z_D^\downarrow = -\frac{S_A}{S_D} \Delta z_A^\uparrow$$

si ottiene:

$$\Delta T = T_C - T_E = T_A - T_B - (\gamma_A^* \Delta z_A^\uparrow - \gamma_D^* \Delta z_D^\downarrow) = -\left[(\gamma_A^* - \gamma_e) + \frac{S_A}{S_D} (\gamma_D^* - \gamma_e) \right] \Delta z_A^\uparrow \quad (4.86a)$$

Se S_A , e quindi Δz_D , tendono a zero, si ha, come già ricordato:

$$\Delta T \Rightarrow -(\gamma_A^* - \gamma_e) \Delta z_A^\uparrow$$

ossia il risultato del metodo particellare in cui $\Delta T = T_C - T_E$ rappresenta la differenza di temperatura fra la particella e l'ambiente.

Possono verificarsi le seguenti situazioni:

PRIMO CASO:

$$\gamma_A^* = \gamma_D^* = \gamma_a \quad (\text{moti verticali in aria priva di nubi})$$

Sia l'aria che sale sia quella che scende seguono i processi adiabatici secchi descritti dal terzo membro della (4.86a):

$$\Delta T = - \left[(\gamma_a - \gamma_e) \left(1 + \frac{S_A}{S_D} \right) \right] \Delta z_A^\uparrow$$

Consideriamo i due sottocasi seguenti:

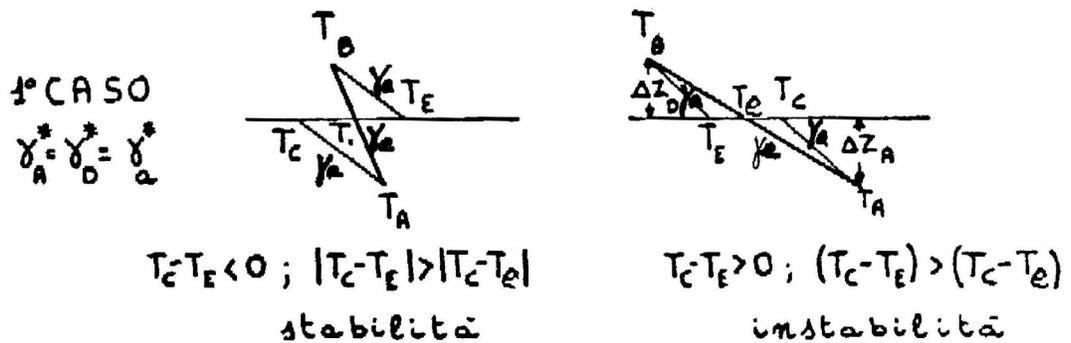


Fig. (4.10)

(a)

(b)

a) atmosfera stabile

$$\gamma_e < \gamma_a : T_C - T_E < 0$$

$$|T_C - T_E| > |T_C - T_e| \text{ (particellare)}$$

b) atmosfera instabile

$$\gamma_e > \gamma_a : T_C - T_E > 0$$

$$|T_C - T_E| > |T_C - T_e| \text{ (particellare)}$$

Il risultato è analogo a quello del metodo particellare, con la differenza che quest'ultimo sottovaluta sia la stabilità sia l'instabilità. Infatti, nel metodo particellare, T_E coincide con T_e .

SECONDO CASO:

$$\gamma_A^* = \gamma_D^* = \gamma_a' \text{ (moti verticali in nube)}$$

$$\Delta T = -(\gamma_a' - \gamma_e) \left(1 + \frac{S_A}{S_D} \right) \Delta z_A \uparrow$$

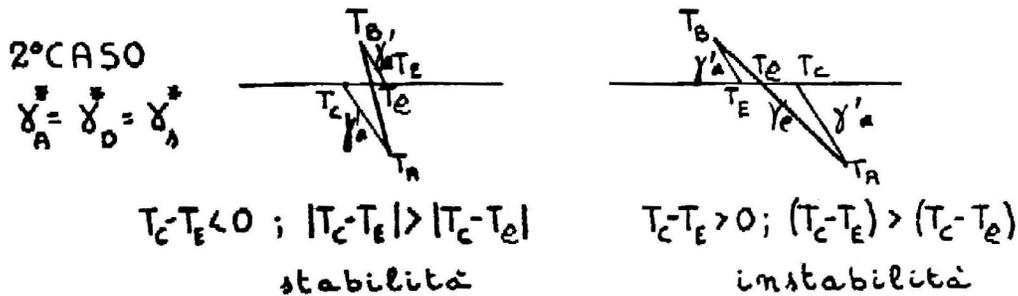


Fig. (4.11)

(a)

(b)

a) atmosfera stabile

$$\gamma_e < \gamma_a' : T_C - T_E < 0$$

$$|T_C - T_E| > |T_C - T_e| \text{ (particellare)}$$

b) atmosfera instabile

$$\gamma_e > \gamma_a' : T_C - T_E > 0$$

$$|T_C - T_E| > |T_C - T_e| \text{ (particellare)}$$

I processi per entrambe le colonne sono adiabatici saturi o pseudoadiabatici; la situazione è simile a quella del caso (1), con ΔT che sono ora meno pronunciati, rispetto al caso delle trasformazioni non sature, in aria stabile, ma più pronunciati in aria instabile.

TERZO CASO:

$\gamma_A^+ = \gamma_a'$ moti ascendenti nella nube

$\gamma_D^+ = \gamma_a$ moti discendenti in aria priva di nubi

l'aria in salita segue un processo adiabatico saturo, mentre l'aria in discesa segue un processo adiabatico secco.

$$\Delta T = \left[(\gamma_e - \gamma_a') + (\gamma_e - \gamma_a) \frac{S_A}{S_D} \right] \Delta z_A$$

Possono presentarsi i seguenti tre sottocasi:

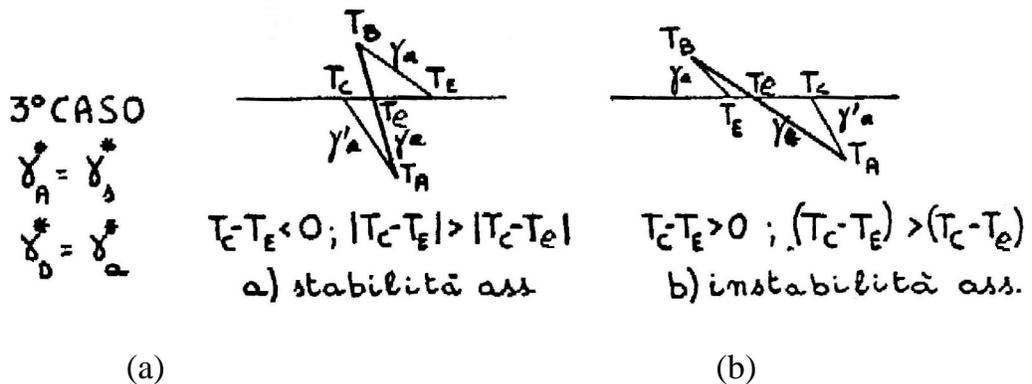


Fig. (4.12)

a) $\gamma_e < \gamma'_a < \gamma_a$ (stabilità assoluta)

ΔT è sempre < 0 , indipendentemente dal rapporto $\frac{S_A}{S_D}$. Inoltre:

$$\Delta T = |T_C - T_E| > |T_C - T_e|$$

Il metodo dello strato prevede quindi una stabilità più accentuata di quanto avrebbe fatto il metodo particellare.

b) $\gamma_e > \gamma_a > \gamma'_a$ (instabilità assoluta)

ΔT è sempre > 0 , indipendentemente dal rapporto $\frac{S_A}{S_D}$. Inoltre:

$$\Delta T = |T_C - T_E| > |T_C - T_e|$$

Il metodo dello strato prevede in questo caso una instabilità maggiore rispetto al metodo particellare.

c) $\gamma_a > \gamma_e > \gamma'_a$ (instabilità condizionale)

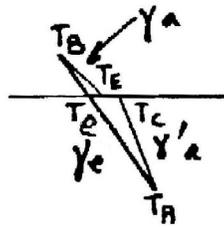
Il segno di ΔT dipende ora anche dal rapporto $\frac{S_A}{S_D}$, ossia dagli spostamenti

verticali Δz_A^\uparrow e Δz_D^\downarrow . Si hanno le 3 possibilità:

$$\frac{S_A}{S_D} < \frac{\gamma'_a - \gamma_e}{\gamma - \gamma_a}$$

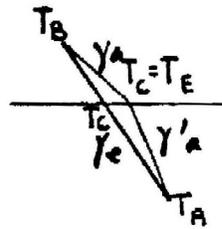
$$\frac{S_A}{S_D} = \frac{\gamma'_a - \gamma_e}{\gamma - \gamma_a}$$

$$\frac{S_A}{S_D} > \frac{\gamma'_a - \gamma_e}{\gamma - \gamma_a}$$



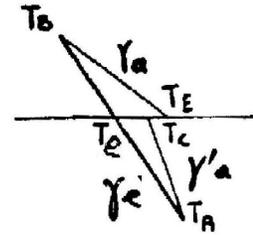
$$T_c - T_e > 0$$

$$T_c - T_e > 0$$



$$T_c - T_e = 0$$

$$T_c - T_e > 0$$



$$T_c - T_e < 0$$

$$T_c - T_e > 0$$

c) instabilità condizionale

(c)

Fig. (4.13)

$$T_c - T_e > 0$$

$$T_c - T_e > T_c - T_e$$

$$T_c - T_e > 0$$

$$T_c - T_e > 0 > T_c - T_e$$

instabile

Il metodo particellare avrebbe dato maggiore instabilità'

$$T_c - T_e = 0$$

indifferente

Il metodo particellare avrebbe dato instabilità'

$$T_c - T_e < 0$$

stabile

Il metodo particellare avrebbe dato instabilità'

Segue dall'analisi di quest'ultima situazione che in una regione dello spazio interessata da nubi convettive, con l'aria condizionalmente stabile,

l'atmosfera può reagire come atmosfera stabile se gli impulsi verso l'alto sono di piccole dimensioni, mentre può reagire come atmosfera instabile per impulsi di dimensioni maggiori.

Si verifica cioè una *selezione degli impulsi*. Ciò può spiegare i torreggiamenti che si verificano nelle nubi cumuliformi in una certa fase del loro sviluppo: incontrando uno strato più stabile la nube tende ad appiattirsi e distendersi: ma là dove l'impulso è più forte e concentrato, l'atmosfera reagisce meno stabilmente e, favorita dall'inerzia, la nube può superare lo strato stabile e svilupparsi ulteriormente.

4.12 – L'instabilità e stabilità convettive.

Queste due tipologie si presentano quando una colonna d'aria, caratterizzata da profili verticali d'umidità relativa variabili con la quota, inizia il percorso di condensazione ad istanti diversi ai vari livelli.

Nel caso rappresentato dalla Figura (4.14a), l'umidità relativa al livello inferiore dello strato (punto A) è considerevolmente più elevata di quello alla sommità dello strato (punto B). Pertanto, la particella (A) inizierà il processo di condensazione prima della particella (B). Di conseguenza, (A) inizierà a seguire la legge di raffreddamento adiabatico saturo γ'_a prima di (B).

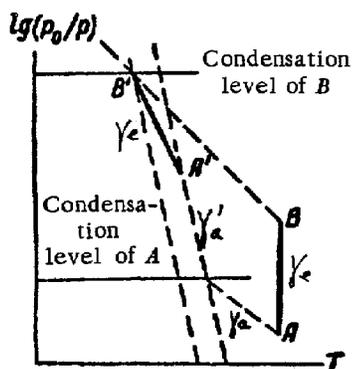


Fig. (4.14a)

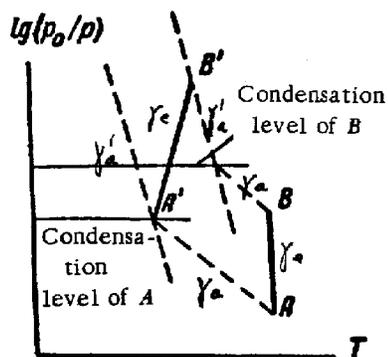


Fig. (4.14b)

Ricordando che $\gamma'_a < \gamma_a$, il *lapse rate* γ_e iniziale (fra A e B) si trasformerà nel nuovo *lapse rate* (fra A' e B'), con il risultato che $\gamma_{e(A'-B')}$ sarà maggiore del $\gamma_{e(A-B)}$, creando quindi una condizione di instabilità che cresce con l'innalzamento. La situazione opposta (Fig. 4.14b), nella quale A raggiunge il livello di condensazione con un innalzamento superiore a quello di B (caso che si verifica se l'umidità relativa è più elevata ai livelli superiori), si avrà che $\gamma_{e(A'-B')} < \gamma_{e(A-B)}$ [$\gamma_{e(A'-B')} < 0$ e $\gamma_{e(A-B)} = 0$]. Conseguenza di ciò sarà la trasformazione da una condizione stabile a una condizione ancora più stabile.

Appendice 4.a

Il bilancio radiativo dell'atmosfera.

La figura (1) mostra il bilancio complessivo del sistema Terra-Atmosfera, suddiviso nelle componenti a onda corta (radiazione visibile) e a onda lunga [infrarosso (IR) o radiazione termica].

La condizione a cui deve soddisfare tale bilancio è quello della stazionarietà su tempi di media di **almeno** 1 anno. Ciò significa che, al termine del ciclo stagionale dell'irraggiamento solare, la Terra deve avere restituito allo spazio, **in media**, tanta energia quanta ne ha ricevuta (altrimenti la sua temperatura crescerebbe o diminuirebbe). **Tale condizione, ovviamente, è tanto meglio soddisfatta quanto più esteso è il periodo di osservazione (quinquennio, decennio, ecc.)** La cessione di energia allo spazio è regolata dalle leggi di emissione di corpo nero che, per la Terra, sono ben soddisfatte (Tab. I).

La radiazione solare media che arriva in ogni secondo su un m^2 di superficie orizzontale al top dell'atmosfera è di $338 J m^{-2} s^{-1}$. Poiché la costante solare è $1367 W m^{-2}$ e stiamo considerando la radiazione che non ha ancora interagito con l'atmosfera (quindi non è stata attenuata), il rapporto di circa 4 fra i due valori si spiega tenendo conto del ciclo diurno [per cui, in particolare, una metà della superficie terrestre (quella che corrisponde alla notte) non riceve irraggiamento solare] e di quello stagionale che modula, nel corso dell'anno, l'altezza del Sole fig. (2) rispetto al piano tangente locale alla sfera terrestre in ciascun punto della Terra (dai Poli all'equatore).

Sotto la figura (1), è riportato il significato di ciascun simbolo e il relativo valore numerico, espresso come frazione della radiazione solare in arrivo fatta uguale a 100. Si vede che 28 unità di radiazione solare vengono riflesse senza assorbimento (albedo) dalle nubi, dall'atmosfera e dalla Terra, per cui al suolo arrivano 47 unità, che vengono assorbite e che riscaldano gli strati superficiali del suolo.

L'atmosfera, nel suo complesso, riesce ad assorbire $5+20=25$ unità di radiazione solare, che scaldano l'aria (diventano quindi energia termica).

La temperatura di equilibrio della superficie terrestre ($\sim 290 K$) comporta una emissione termica di corpo nero di 114 unità (radiazione IR, a onda lunga); questa è assorbita dai gas radiativamente attivi dell'atmosfera (soprattutto

vapore d'acqua, CO₂, CH₄, NO_x, ecc) e riemessa in tutte le direzioni da questi ultimi. La parte diretta verso la Terra (*96 unità*) fa sì che la perdita netta di radiazione a onda lunga della Terra sia $96 - 114 = -18$ *unità*.

La Terra aveva assorbito *47* unità di radiazione solare, cosicché si trova ad avere un surplus di energia di $47 - 18 = 29$ *unità*, per cui dovrebbe riscaldarsi. L'atmosfera, delle *114* unità emesse come radiazione IR dalla Terra, ne assorbe *109* (*5* sfuggono verso lo spazio attraverso la finestra del vapore d'acqua), che però perde in misura ancora maggiore (*-163* *unità*) sotto forma sia di radiazione inviata a terra (le -96 *unità* già viste), sia di radiazione inviata verso lo spazio (-67 *unità*).

Pertanto, il bilancio radiativo dell'atmosfera si chiude con un deficit di $-163 + 109 = -54$ *unità*, per cui dovrebbe raffreddarsi. A questo punto, ci ricordiamo che la radiazione solare a onda corta, assorbita dalle nubi, gas e polveri dall'atmosfera, aveva contribuito a un riscaldamento dell'aria di *25* *unità*, per cui il deficit si riduce a $-54 + 25 = 29$ *unità*, corrispondenti esattamente al surplus della Terra. Questa situazione paradossale è solo apparente: la convezione termica turbolenta ($Q_h \cong \rho W'$) e l'evaporazione (flusso di calore Q_E) riaggiustano lo sbilanciamento, sottraendo $5 + 24 = 29$ *unità* alla terra e fornendole all'atmosfera, che le assorbe. In questo modo si raggiunge la condizione di bilanciamento stazionario.

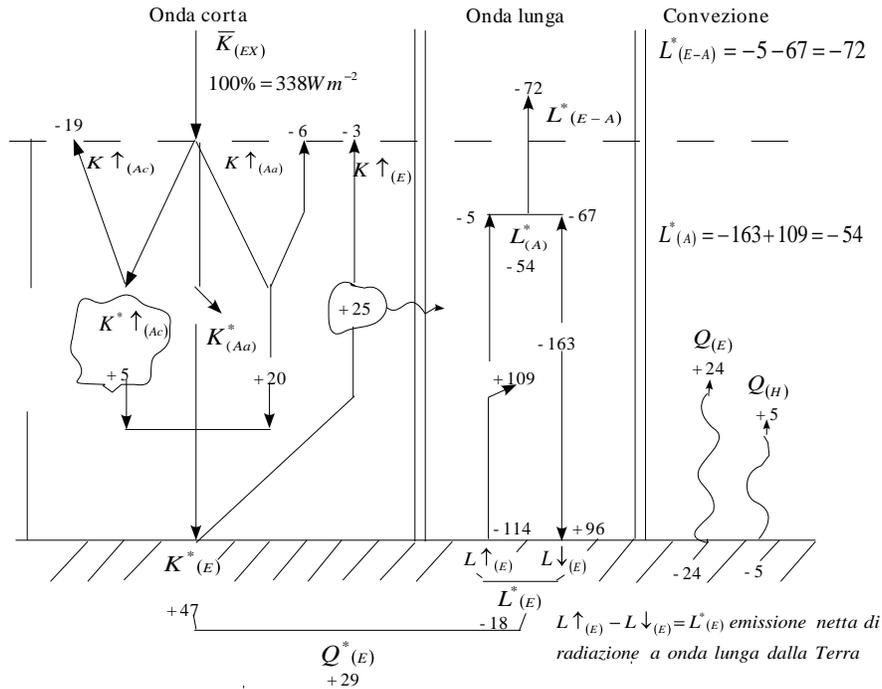


Fig. 1 - Diagramma schematico della cascata media annuale di energia solare nel sistema Terra-Atmosfera. I valori numerici sono espressi come percentuali del valore medio annuale della radiazione solare extra terrestre [$\bar{E}_{(EX)} = 338 W m^{-2}$]

LEGENDA

- $Q^*_{(E)}$ = accumulo apparente di calore da parte della Terra ($47-18 = 29$)
- $L^*_{(E-A)}$ = radiazione a onda lunga riemessa verso lo spazio dal sistema Terra-Atmosfera
- $L^*_{(A)}$ = radiazione a onda lunga persa dall'Atmosfera
- $L \uparrow_{[E]}$ = radiazione a onda lunga ($= \sigma \bar{T}^4$) emessa verso l'alto dalla Terra ($\bar{T} \cong 295 K$)
- $L \downarrow_{(E)}$ = radiazione a onda lunga riemessa dall'Atmosfera verso la Terra, e da questa riassorbita
- $Q_{(E)}, Q_{(H)}$ = flussi di calore latente e sensibile emessi dalla Terra e assorbiti dall'Atmosfera
- $\bar{K}_{(EX)}$ = radiazione media (sulla sfera e sull'anno) in arrivo al top dell'Atmosfera (non attenuata dall'aria e dalle nubi)
- $K \uparrow_{(Ac)}$ = frazione di radiazione a onda corta riflessa (albedo) dalle nubi
- $K \uparrow_{(Aa)}$ = albedo delle molecole e del pulviscolo atmosferico
- $K \uparrow_{(E)}$ = albedo della Terra
- $K^*_{(Ac)}$ = frazione di radiazione solare assorbita dalle nubi
- $K^*_{(Aa)}$ = frazione di radiazione solare assorbita dalle molecole e dal pulviscolo atmosferico
- $K^*_{(E)}$ = frazione di radiazione solare assorbita dalla Terra
- $K \uparrow_{(Ac)}; K \uparrow_{(Aa)}$ e $K \uparrow_{(E)}$ mantengono la stessa lunghezza d'onda della radiazione incidente
- $K^*_{(Ac)}; K^*_{(Aa)}$ e $K^*_{(E)}$ convertono l'energia a onda corta assorbita in radiazione a onda lunga

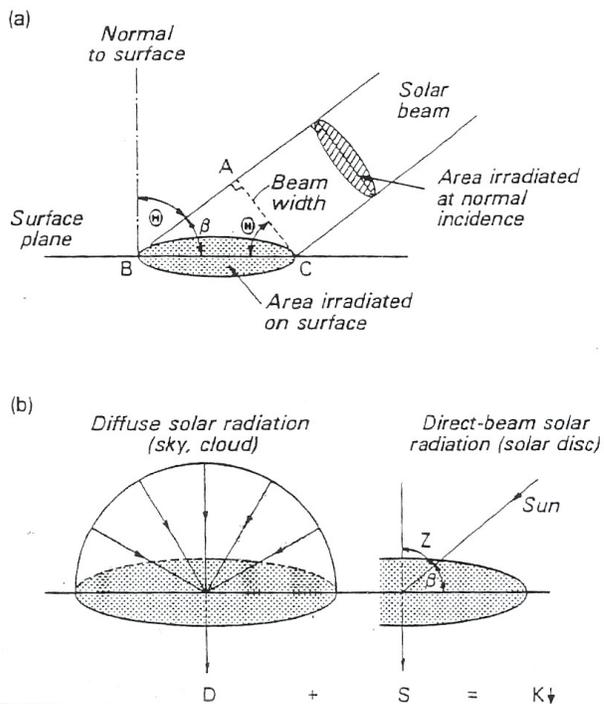


Figure 2 Illustration of the areas irradiated by a circular beam on planes placed normal to, and at an angle Θ to, the beam. The radiant energy flux (J s^{-1}) is spread over unit area ($= \pi(0.5AC)^2$) at normal incidence but over a larger area ($= \pi(0.5BC)^2$) on the surface. The flux density (W m^{-2}) on the surface (S) is less than that at normal incidence (S_i) by the ratio $AC/BC = \cos \Theta$ or $\sin \beta$. Therefore, $S = S_i \cos \Theta$ and when $\Theta = 0^\circ$ $\cos \Theta = 1$ and $S = S_i$. For a horizontal surface $\Theta = Z$ the zenith angle of the Sun. (b) The components of incoming solar radiation at the Earth's surface (modified after Monteith, 1973).

Tabella I Radiative properties of natural materials.

Surface	Remarks	Albedo α	Emissivity ϵ
Soils	Dark, wet	0.05–	0.90–
	Light, dry	0.40	0.98
Desert		0.20–0.45	0.84–0.91
Grass	Long (1.0 m)	0.16–	0.90–
	Short (0.02 m)	0.26	0.95
Agricultural crops, tundra		0.18–0.25	0.90–0.99
Orchards		0.15–0.20	
Forests			
Deciduous	Bare	0.15–	0.97–
	Leaved	0.20	0.98
Coniferous		0.05–0.15	0.97–0.99
Water	Small zenith angle	0.03–0.10	0.92–0.97
	Large zenith angle	0.10–1.00	0.92–0.97
Snow	Old	0.40–	0.82–
	Fresh	0.95	0.99
Ice	Sea	0.30–0.45	0.92–0.97
	Glacier	0.20–0.40	

Sources: Sellers (1965), List (1966), Paterson (1969) and Monreith (1973).