

CAPITOLO 5

DINAMICA DELL'ATMOSFERA

5.1 – Generalità.

La dinamica dell'atmosfera studia i movimenti dell'aria che, nel loro complesso, determinano sia il cosiddetto *tempo meteorologico* sia, su scale temporali più estese, il *clima*. Quest'ultimo, risultando dalla statistica (medie e momenti statistici di ordine superiore) dei vari stati del tempo meteorologico osservati nel corso di un determinato arco temporale indipendentemente dall'ordine cui si sono succeduti, non è stato, in passato, propriamente oggetto diretto della dinamica, ma vi si ricollega oggi in modo sempre più stretto a mano a mano che procedono le nostre conoscenze sulla fisica atmosferica.

Le leggi fondamentali della dinamica atmosferica sono espresse da equazioni differenziali a derivate parziali in cui le grandezze fisiche che rappresentano il campo fluido-dinamico (velocità, accelerazione, densità, temperatura) sono definite rispetto a una base fondamentale di quattro grandezze fondamentali indipendenti (lunghezza, massa, tempo e temperatura). Come già detto altrove, la serie completa di tali equazioni è assai complessa e non se ne conoscono, a tutt'oggi, soluzioni generali. Pertanto occorre procedere a semplificazioni che vengono principalmente fatte applicando la cosiddetta *analisi di scala*, i cui principi teorici verranno sviluppati nel Capitolo 8 (dell'Analisi Dimensionale e Teoria della Similarità Dinamica). La scala

spaziale, o temporale, associata ad una certa grandezza del campo, esprime la distanza, o l'arco di tempo su cui si osserva una variazione apprezzabile della grandezza stessa¹. Pertanto, in funzione del dominio spazio-temporale sul quale si considera un determinato fenomeno, talune derivate fatte rispetto alle coordinate spaziali o a quelle temporali sulle diverse scale, possono essere più o meno rilevanti e quindi venire trattenute nel sistema di equazioni, ovvero venire scartate.

In genere, se una variabile di campo ha una scala spaziale piccola, anche la sua scala temporale sarà breve (e viceversa), il che permette, ad esempio, di non prendere in considerazione, nei moti a scala di alcuni chilometri, la dipendenza dalla rotazione terrestre, il cui periodo rappresenta una scala temporale elevata ($T_f \cong 10^5 s$), tipica di fenomeni atmosferici a scala di centinaia di chilometri e più².

Le scale dei moti atmosferici coprono un intervallo estremamente ampio, che va dai 10^{-7} m (cammino libero medio molecolare) ai 10^7 m (moti planetari, o globali). Data la continuità del fluido atmosferico, non esistono confini netti che separino le varie scale di moto e ciò introduce una ulteriore difficoltà nell'analisi dei moti dell'atmosfera.

Le equazioni indefinite, o primitive, del moto dell'atmosfera derivano dalle leggi di conservazione della massa, della quantità di moto e dell'energia, applicate ad un volume elementare di fluido. Le condizioni iniziali, al contorno e le proprietà spazio-temporali del fluido determinano poi le grandezze di scala derivate che, aggiunte alle quattro unità fondamentali [L,M,T,K], permettono di enucleare, con un'appropriata analisi di scala, gli

¹ Una definizione equivalente di scala e' anche la distanza, o arco di tempo, su cui una certa grandezza fisica mostra coerenza interna, quale ad esempio una circolazione ciclonica o anticiclonica. Viene quindi detta anche scala di "coerenza" spazio-temporale delle strutture di moto.

² Ciò non vale più se la velocità di scala $U \rightarrow 0$: infatti, $Ro = \frac{T_f}{T_{avv}} = \frac{T_f}{L/U} = \frac{T_f}{L} U$

indici (o coefficienti) che esprimono, per ciascuna situazione presa in considerazione, i termini che rivestono maggiore importanza. La legge di conservazione della quantità di moto, o seconda legge di Newton della dinamica, stabilisce, in particolare, l'equilibrio fra la variazione temporale della quantità di moto e la risultante delle forze agenti.

5.2 – Le principali forze *reali* nell'atmosfera in movimento.

Abbiamo già detto (nel Capitolo 3 dell' Atmosfera Statica) che, essendo l'atmosfera un mezzo che assimiliamo ad un “*continuo*” non “*compartimentabile*”, ossia non circoscrivibile con recipienti a pareti rigide e pistoni, risulta opportuno (se non indispensabile) riferire le forze all'unità di massa. Rispetto a un sistema di riferimento inerziale, le tre principali forze agenti sull'unità di massa nell'atmosfera sono quelle di gradiente di pressione, d'attrito e gravitazionale. L'ultima di queste forze è già stata studiata nel capitolo della Statica, ove si è soprattutto considerata la componente verticale della forza di gradiente di pressione.

Ricaviamo, per prima, *la forza di gradiente di pressione*, ossia la forza che ogni elemento fluido esercita sugli elementi contigui attraverso la superficie di separazione. Per quanto detto nei capitoli introduttivi di questo Corso, le forze agenti sull'atmosfera verranno pertanto espresse nella forma di grandezze “intensive”, funzioni del punto dello spazio (forze per unità di massa, ossia accelerazioni). Consideriamo un parallelepipedo fluido elementare di volume $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ e densità ρ , centrato sul punto $P(x_o, y_o, z_o)$ dove la pressione vale $p_0 = p(x_o, y_o, z_o)$ - vedere fig. (5. 1).

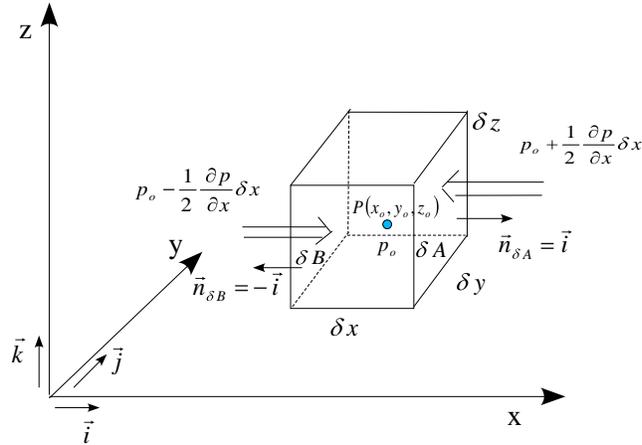


Fig. (5.1)

Analizziamo, inizialmente, la componente di tale forza lungo l'asse x ; sviluppando p_0 in serie di Taylor³ nell'intorno di (x_0, y_0, z_0) , la pressione p esercitata dall'aria circostante sulla superficie δA di δV , perpendicolare alla direzione x e collocata in $x = (x_0 + \frac{1}{2} \delta x)$, sarà:

$$p_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x + \text{termini d'ordine superiore}$$

e ad essa corrisponderà la forza (componente x) agente su δV attraverso la superficie δA , data da:

$$(\delta F_{\delta A})_x = - \left(p_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z$$

³ $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots$

Se $a=0$ e $h=x$, si ha lo sviluppo di McLaurin: $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$

il segno negativo a secondo membro indicando che la forza di pressione esterna agente su δA è orientata in verso opposto a quello del versore \vec{i} dell'asse coordinato x o, cioè che è lo stesso, della normale \vec{n} della superficie dA .

Sulla superficie δB si avrà invece la forza:

$$(\delta F_{\delta B})_x = + \left(p_o - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \right) \delta y \delta z$$

In conclusione, la componente lungo l'asse x della forza netta di pressione agente su δV sarà:

$$\delta F_x = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta x \delta y \delta z = - \frac{\partial p}{\partial x} \delta V = - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\delta m}{\rho}$$

e, sull'unità di massa, si avrà l'accelerazione:

$$\frac{\delta F_x}{\delta m} = (f_p)_x = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Poiché lo stesso ragionamento vale per le altre due coppie di superfici normali agli assi y e z , la forza di gradiente di pressione per unità di massa sarà comprensivamente:

$$\vec{f}_p = \frac{\vec{F}_p}{m} = - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (5.1)$$

indipendente dal valore assoluto della pressione ma dipendente solo dalla distribuzione spaziale di quest'ultima.

La *forza d'attrito*, invece, deriva dagli scambi di quantità di moto fra diversi strati fluidi che scorrono l'uno rispetto all'altro. Nei trattati dedicati alla turbolenza atmosferica si discute assai a fondo su questo fondamentale (e ancora poco conosciuto) argomento; qui ci limitiamo a ricordare le leggi classiche della viscosità nei fluidi, le quali introducono il concetto di coefficiente di viscosità molecolare a cui, in atmosfera, si associa (per analogia puramente qualitativa) un coefficiente di viscosità turbolenta, esprimente gli scambi di quantità di moto dovuti al rimescolamento turbolento dei filetti fluidi viscosi. Nella dinamica atmosferica è sufficiente limitarsi a ricordare questa analogia, in quanto i moti atmosferici che essa tratta sono prevalentemente quelli a grande scala che avvengono al di sopra dello strato d'attrito, o di Ekman (per il quale invece è indispensabile una rappresentazione più adeguata dell'attrito turbolento); in tali regioni superiori dell'atmosfera si ripristinano infatti, almeno qualitativamente, le condizioni di flusso laminare, o quasi-laminare, per cui i termini di attrito, parametrizzati attraverso il cosiddetto *tensore di stress* τ nell'analogia molecolare, diventano (per le grandi scale di moto) trascurabili rispetto agli altri termini.

Definendo nello spazio un tensore di stress [o di sforzo $\tau = \tau(x, y, z)$] e riferendoci ancora, come abbiamo fatto per le forze di gradiente di pressione, ad un volume elementare δV , sviluppiamo in serie di Taylor, intorno al punto $P(x, y, z)$ su cui è centrato δV [Fig. (5.2)], le componenti tangenziali (dette anche *di taglio*) di tale tensore.

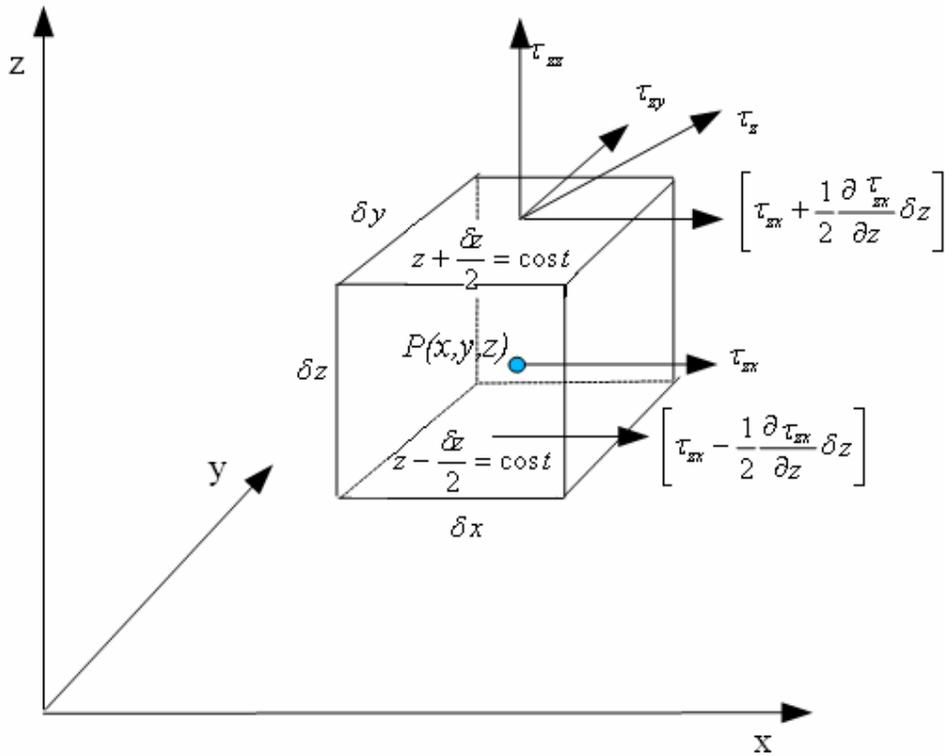


Fig. (5.2)

Se ci riferiamo alle due superfici parallele al piano (x,y) , di equazione rispettivamente $z - \frac{\delta z}{2} = cost$ e $z + \frac{\delta z}{2} = cost$, le componenti tangenziali

dello sforzo che agiscono su di esse saranno rispettivamente $\left(\tau_{zx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \right)$ e

$\left(\tau_{zx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \right)$, dove il pedice “zx” indica lo sforzo che si esercita nella

direzione x sulla superficie $z = cost$.

Poiché le componenti tangenziali del tensore di sforzo hanno lo stesso significato analogo a quello della pressione (la pressione non è altro che la

componente normale dello sforzo, ossia $p = \tau_{xx} = \tau_{yy} = \tau_{zz}$ in un mezzo isotropo), la forza netta, o sforzo relativo, su δV dovuta agli sforzi tangenziali, o di taglio, agenti sulle sue superfici parallele al piano (x,y) - lungo la direzione x - sarà:

$$\delta R_{zx} = \left[\left(\tau_{zx} + \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \right) - \left(\tau_{zx} - \frac{1}{2} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \right) \right] \delta y \delta x = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \delta y \delta x = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta V = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{\delta m}{\rho}$$

in analogia con il modello su cui si basa il teorema di Poiseuille che dà, per la forza di attrito interno viscoso (con verso opposto al moto), la legge:

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

Essendo μ il coefficiente di viscosità dinamica, possiamo così esprimere la forza d'attrito per unità di massa, se $\rho = cost$, con:

$$r_{zx} = \frac{\delta R_{zx}}{\delta m} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (5.2)$$

Se poi anche $\mu = cost$, si può introdurre la viscosità cinematica $\nu = \frac{\mu}{\rho}$, per cui la relazione precedente può scriversi:

$$r_{zx} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (5.3)$$

Per quanto prima detto, nell'atmosfera in movimento, si sostituisce - nella relazione sopra ottenuta - alla viscosità cinematica molecolare ν la viscosità cinematica turbolenta ν_T , di parecchi ordini di grandezza superiore (è

dell'ordine di $10^2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$)⁴. La viscosità cinematica turbolenta ν_T , a differenza della viscosità cinematica molecolare ν (che è una proprietà del **fluido**), è una proprietà del **flusso** (fluido in movimento).

ν_T viene anche definita come $\nu_T = ul$, per cui $\text{Re}_T = 1$ (Re_T prende il nome di numero di Reynolds “turbolento”, mentre l rappresenta la “scala” dei vortici turbolenti)

5.3 – Le forze *apparenti* nell'atmosfera.

L'ipotesi di sistema di riferimento inerziale fatta prima nel definire le forze fondamentali in atmosfera non è più valida se si riferiscono i movimenti dell'aria alla terna di riferimento **non inerziale** solidale con la Terra che ruota. E' noto che, in questo caso, le leggi del moto si possono applicare solo a condizione che si tenga conto dell'accelerazione delle coordinate, il che corrisponde a introdurre, nella seconda legge di Newton, le cosiddette **forze apparenti**.

Per un osservatore solidale con una terna di riferimento in rotazione uniforme, le forze apparenti sono due, la forza centrifuga e la forza di Coriolis. Cominciamo dal caso in cui l'elemento fluido sia stazionario rispetto alla terna di riferimento solidale con la Terra (che ruota con la velocità angolare $\bar{\Omega}$).

⁴ Questa operazione viene detta **parametrizzazione della viscosità turbolenta**, intendendo con ciò che proprietà non meglio definite dei moti turbolenti vengono sostituite da un **parametro dedotto da osservazioni macroscopiche**, ossia a scala spazio-temporale maggiore delle scale dei moti turbolenti. Essa consente di applicare l'ipotesi di mezzo continuo e di esprimere i termini dinamici mediante operatori di derivate. Nel caso di vortici la cui scala sia sufficientemente grande da poter essere risolta e rappresentata esplicitamente, si utilizzano le moderne tecniche LES (Large Eddy Simulation), basate sull'integrazione diretta delle equazioni di Navier-Stokes alla risoluzione richiesta.

L'osservatore fisso rispetto a quest'ultima terna di assi *sente* che gli oggetti possono rimanere in quiete (relativamente alla sua posizione) solo se viene loro applicata una forza diretta verso di lui (forza centripeta); in caso contrario, essi vengono da lui visti allontanarsi con moto accelerato. In altre parole, per l'osservatore non inerziale *esiste* una **forza centrifuga**, agente sugli oggetti che sono con lui solidali, la quale fa sì che il loro stato di quiete possa essere mantenuto solo se essa viene bilanciata da una forza di uguale modulo e verso opposto, che è appunto la **forza centripeta**.

Quest'ultima è, per l'osservatore *inerziale*, la forza (reale) che, applicata all'oggetto in questione, gli fa compiere la traiettoria circolare (traiettoria assoluta).

L'espressione della forza centrifuga per unità di massa (ossia dell'accelerazione centrifuga) è la seguente:

$$\vec{a}_{centrifuga} = \vec{a}_{cfg} = \Omega^2 \vec{R} = -\vec{a}_{centripeta} = -\vec{a}_{cpt} = -\vec{a}_t \quad (5.4)$$

\vec{a}_t , essendo l'accelerazione di trascinamento, o accelerazione centripeta.

Per la Terra, la velocità angolare $|\vec{\Omega}|$ vale $7.3 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$; \vec{R} , che rappresenta la distanza fra la particella di massa unitaria e l'asse di rotazione della Terra, è un vettore orientato verso l'esterno ed è perpendicolare a $\vec{\Omega}$ a tutte le latitudini, per cui $|\vec{\Omega} \times \vec{R}| \equiv \Omega R$ (vedere anche il Cap. 3 – Statica dell'Atmosfera)

L'accelerazione centrifuga si combina con l'accelerazione di gravità assoluta, bilanciandola parzialmente. La forza di gravità per unità di massa che così risulta sulla Terra rotante, e che prende il nome di gravità apparente, o semplicemente di gravità, è data dall'espressione [vedi anche § 3.1]:

$$\vec{g}^* + \Omega^2 \vec{R} = \vec{g} = -\frac{GM}{a^2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) \left(1 + \frac{z}{a} \right)^{-2} + \Omega^2 \vec{R} \quad (5.5)$$

dove a è il raggio terrestre ($6.37 \cdot 10^6$ m), G ($6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$) è la costante della gravitazione universale e $r = a + z$, z essendo la quota sul livello del mare nel punto che si considera.

Il vettore \vec{g} risulta essere ancora conservativo, in quanto la forza centrifuga (5.4) può essere anch'essa scritta come gradiente di una funzione scalare

$$\Phi_i = -\frac{(\vec{\Omega} \times \vec{R})^2}{2} = -\frac{1}{2} \Omega^2 R^2 \cong 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \quad (\text{all'Equatore}), \text{ per cui } \vec{a}_i = -\nabla \Phi_i .$$

In tal modo, si può scrivere che $\vec{g} = -\nabla \Phi_g^* - \nabla \Phi_i$.

All'equatore, \vec{R} ha la stessa direzione e modulo di \vec{a} [vedi figure (3.2) e (3.3)], ossia i due vettori di posizione coincidono, mentre ai poli $|\vec{R}|=0$; pertanto solo all'equatore e ai poli \vec{g} è diretto verso il centro della Terra. La Terra ha compensato il fatto che \vec{g} avesse quasi ovunque una piccola componente verso l'equatore, assumendo una forma ellissoidale (geoide) tale per cui \vec{g} risulta ovunque perpendicolare alla superficie terrestre. Il raggio equatoriale risulta pertanto di 21 Km maggiore di quello polare. Questa diversa distanza dal centro della Terra dei punti della superficie terrestre quando ci si sposta dai poli all'equatore determina una variazione di \vec{g} data dalla formula (3.6) in cui si sia posto $z=0$.

La seconda forza apparente che si deve aggiungere alla seconda legge di Newton è quella – cosiddetta deviante - di Coriolis, e interviene quando l'elemento fluido è in movimento relativo rispetto alla terna solidale con la Terra.

Per la derivazione analitica completa dell'accelerazione di Coriolis, (e anche di quella centrifuga) si rimanda ai testi di Fisica Generale⁵.

Vogliamo invece sviluppare qui alcune considerazioni che aiutino a visualizzare i principali fenomeni che avvengono nell'atmosfera in moto relativo rispetto alla Terra lungo i paralleli e i meridiani (moti zonali e meridionali, rispettivamente).

Cominciamo, per semplicità, a rappresentare la Terra come una piattaforma girevole, sulla quale non consideriamo (per il momento) alcuna forza (tipo quella di gravità) rivolta verso il suo centro.

⁵ Vedi, ad esempio, C. Castagnoli – Fisica Generale – Levrotto e Bella 1984, pp. 170-183 e pp. 238-241.

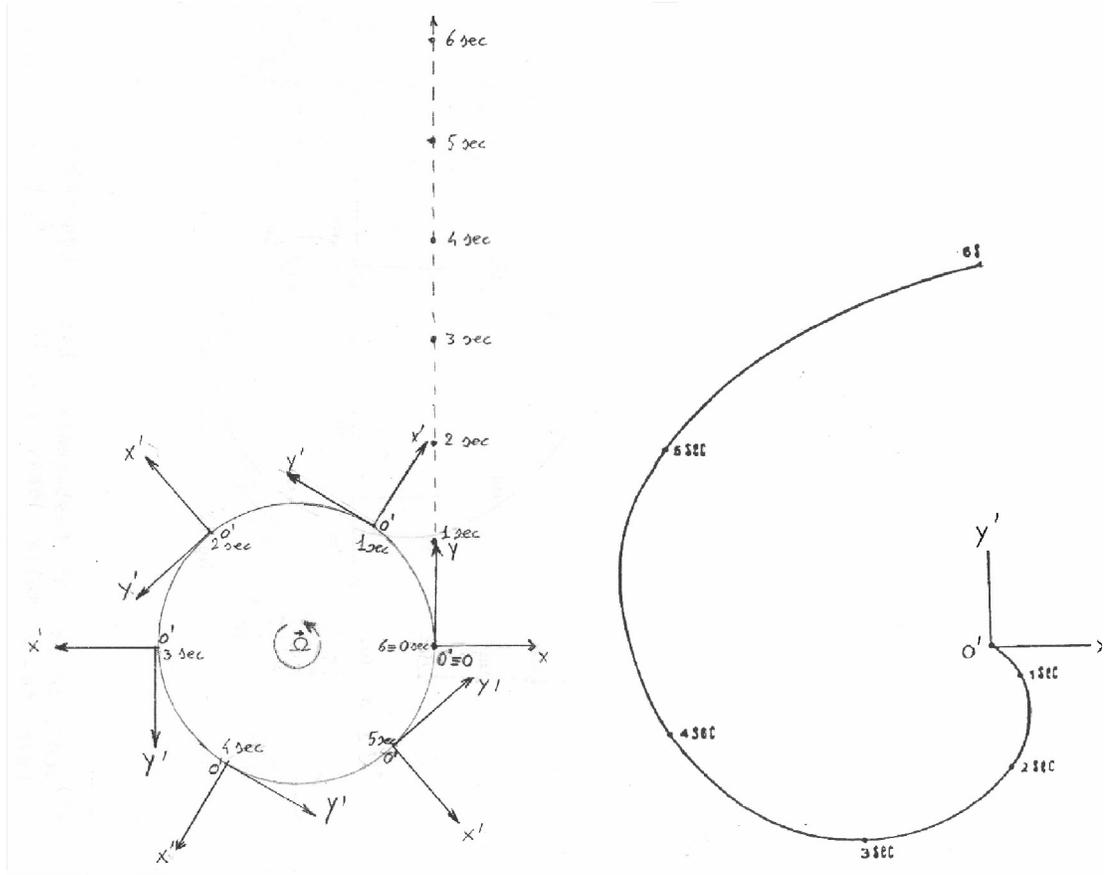


Fig. (5.3)

Ricordiamo che un elemento fluido, in moto rettilineo uniforme rispetto a una terna di riferimento inerziale $O(x,y)$ grande e transitante, al tempo $t = 0 \text{ sec}$, per un punto O' del bordo della piattaforma rotante (con velocità angolare $\vec{\Omega}$) [vedi fig. (5.3)], è visto - da un osservatore solidale con la terna rotante della piattaforma (terna non inerziale) - percorrere una traiettoria curvilinea; ossia, rispetto al sistema di riferimento non inerziale in rotazione, compare una forza apparente che devia la particella dal suo moto rettilineo inerziale nella direzione opposta a quella della rotazione delle coordinate.

Ancora con riferimento alla fig. (5.3), il nostro elemento fluido mostra, rispetto all'osservatore solidale con il sistema rotante in senso antiorario, di

possedere una accelerazione apparente che lo fa spiralizzare verso l'esterno e a destra, ossia all'indietro.

E', questo, l'effetto della accelerazione di Coriolis che, agendo perpendicolarmente al vettore velocità, ne può solo cambiare la direzione, ma non il modulo.

La separazione via via crescente dei punti in Fig. (5.3), distanziati fra loro di *l secondo*, evidenzia, inoltre, l'esistenza di un'altra accelerazione apparente, che è l'accelerazione centrifuga vista dall'osservatore solidale con il sistema di coordinate terrestri rotanti, la quale ha una componente lungo la direzione e il verso di moto dell'elemento fluido. L'effetto di quest'ultima accelerazione sul moto dell'atmosfera è comunque piccolo, in quanto essa si combina con l'accelerazione (centripeta) di gravità che, nella approssimazione qui adottata, non compare, ma che sulla Terra è preponderante ed è inoltre bilanciata (come si era già visto nel Cap. 3) dal gradiente verticale di pressione (equazione dell'equilibrio statico dell'atmosfera).

Nell'esempio scelto, l'origine \mathbf{O}' del sistema di riferimento non inerziale tangente alla piattaforma *non* è fissa nello spazio ma percorre una traiettoria circolare, poiché si trova sulla superficie terrestre, ossia sul bordo della piattaforma circolare, e non al centro della Terra, il che spiega l'andamento irregolare della traiettoria a spirale dell'elemento materiale, andamento dovuto al contributo dell'accelerazione centripeta dell'origine \mathbf{O}' rispetto al centro \mathbf{O}' della piattaforma. Nel seguito, però, si assumerà, almeno inizialmente, che $\mathbf{O} = \mathbf{O}'$; questa ipotesi semplificatrice non altererà la validità dei risultati ottenuti per i moti atmosferici sulla Terra, come vedremo nei paragrafi seguenti.

5.3.1 - Moto relativo rotatorio uniforme. ⁶

Prendiamo in considerazione la trasformazione fra due Sistemi di Riferimento (S.R. e S.R.') in cui i due osservatori \mathbf{O} e \mathbf{O}' ruotano l'uno rispetto all'altro con una velocità angolare $\bar{\omega}$ costante.

Per semplicità, poniamo coincidenti le origini \mathbf{O} e \mathbf{O}' , ossia $[\mathbf{O} = \mathbf{O}']$, e gli assi dei due sistemi S.R. e S.R.', che hanno questa comune origine, disposti come fig. (5.4)

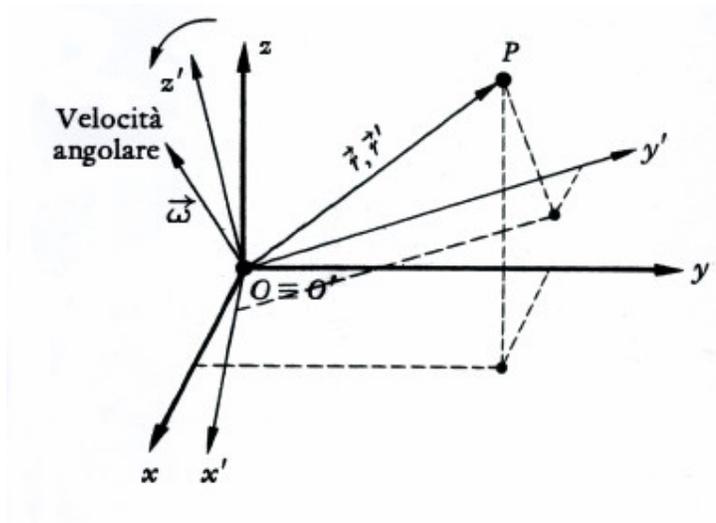


Fig. (5.4)

Di conseguenza, anche i vettori di posizione \vec{r} e \vec{r}' del punto \mathbf{P} , di cui vogliamo considerare il moto rispetto ai due S.R. e S.R.' risulteranno disposti come in fig. (5.4).

I vettori di posizione \vec{r} e \vec{r}' del punto \mathbf{P} di cui vogliamo studiare il moto rispetto ai due osservatori \mathbf{O} e \mathbf{O}' saranno:

⁶ Dal testo di Fisica Generale – Meccanica – Termodinamica del Prof. Carlo Castagnoli – Editto da Levrotto e Bella – Torino – 1984.

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad ; \quad \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' \quad ; \quad \vec{r} = \vec{r}' \quad (5.6)$$

ove l'ultima uguaglianza è giustificata dal fatto che le origini degli assi coincidono ($\mathbf{0}=\mathbf{0}'$).

Le velocità \vec{v} e \vec{v}' del punto mobile P misurate rispettivamente in S.R e in S.R' saranno, per definizione, le derivate di \vec{r} e \vec{r}' rispetto al tempo (che è uguale in S.R. e in S'.R'), per cui:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \quad (5.7)$$

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' \quad (5.7a)$$

Calcoliamo ora l'espressione di \vec{v}' per l'osservatore \mathbf{O} . Questo osservatore vede i versori $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ruotare, mentre l'osservatore \mathbf{O}' - nel ricavare \vec{v}' con l'equazione (5.7) - li vede costanti in direzione (come, del resto, è corretto, essendo egli solidale con essi). Quindi \mathbf{O} , nel fare la derivata di \vec{r} rispetto al tempo, deve anche derivare rispetto al tempo i versori $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ (e non solo x', y', z' come fa \mathbf{O}'). In altre parole, per \mathbf{O} si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{v}' + x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} = \\ &= \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r}' = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \end{aligned} \quad (5.8)$$

avendo applicato la (5.7a) l'ultima condizione della (5.6), ossia $\vec{r} = \vec{r}'$.

Poiché la terna $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ ruota con velocità angolare costante $\vec{\omega}$, si ha che $\frac{d\vec{i}'}{dt}$ è la velocità di un punto posto a distanza unitaria dal centro di rotazione $\mathbf{O}=\mathbf{O}'$

che si muove circolarmente con velocità angolare $\vec{\omega}$ (e lo stesso sarà per $\frac{d\vec{j}'}{dt}$ e $\frac{d\vec{k}'}{dt}$). In altre parole, avremo che:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}'; \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}'; \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}' \quad (5.9)$$

Le (5.9) sono dette formule di Poisson.

Potremo quindi scrivere, ricordando anche la (5.6)

$$x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + z' \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}') = \vec{\omega} \wedge \vec{r}' = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (5.10)$$

Inserendo questa espressione nella (5.8), si ottiene in conclusione la fondamentale trasformazione che si cercava tra le velocità \vec{v} e \vec{v}' del punto mobile P rilevate dai due osservatori \mathbf{O} e \mathbf{O}' in moto relativo rotatorio uniforme:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge \vec{r} \quad (5.11)$$

Anche in questo caso spesso si indica con \vec{v}_t la velocità di trascinamento $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$, con la convenzione che si ritiene fisso il S.R. e mobile il sistema S.R.', chiamando impropriamente \vec{v} velocità assoluta e \vec{v}' velocità relativa.

Passiamo ora a considerare la trasformazione delle accelerazioni.

Derivando la (5.11) rispetto al tempo t si ha, considerando che $\vec{\omega} = \text{cost.}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}$$

dove \bar{a} é l'accelerazione del punto mobile P misurata da O nel suo sistema.

Conviene effettuare una piccola trasformazione su questa espressione: dal

momento che $\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{v}$ e utilizzando la (5.11), essa diventa:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}'}{dt} + \bar{\omega} \wedge \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{v}'}{dt} + \bar{\omega} \wedge (\bar{v}' + \bar{\omega} \wedge \bar{r}) = \frac{d\bar{v}'}{dt} + \bar{\omega} \wedge \bar{v}' + \bar{\omega} \wedge (\bar{\omega} \wedge \bar{r}) \quad (5.12)$$

Calcoliamo ora il termine $\frac{d\bar{v}'}{dt}$

Essendo, per (5.7a) $\bar{v}' = u\bar{i}' + v\bar{j}' + w\bar{k}'$, derivando e tenendo conto che i versori ruotano, si ha:

$$\frac{d\bar{v}'}{dt} = \frac{du'}{dt}\bar{i}' + \frac{dv'}{dt}\bar{j}' + \frac{dw'}{dt}\bar{k}' + u'\frac{d\bar{i}'}{dt} + v'\frac{d\bar{j}'}{dt} + w'\frac{d\bar{k}'}{dt} \quad (5.13)$$

Ora, per definizione, l'accelerazione \bar{a}' del punto mobile P misurata da **O'** rispetto al proprio sistema di riferimento è data proprio dai primi tre termini della (5.13).

Inoltre, ripetendo i ragionamenti fatti a proposito della velocità, si vede subito che gli ultimi tre termini equivalgono a $\bar{\omega} \wedge \bar{v}'$.

Pertanto, la (5.13) potrà scriversi nel modo seguente:

$$\frac{d}{dt}(\bar{v}') = \bar{a}' + \bar{\omega} \wedge \bar{v}' \quad (5.13a)$$

Sostituendo ora nella (5.12) quest'ultima relazione, otteniamo la cosiddetta “relazione fondamentale fra le accelerazioni (assoluta) \bar{a} e (relativa) \bar{a}' del punto mobile P, misurate dagli osservatori **O** e **O'**, **in moto relativo rotatorio uniforme**”, data da:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}' + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) \quad (5.14)$$

Come si vede, oltre al termine \vec{a}' vi sono altri due termini dell'accelerazione che si originano dal moto “**relativo**” rotatorio degli osservatori.

Il termine $2\vec{\omega} \wedge \vec{v}'$ è detto “accelerazione di Coriolis” [\vec{a}_{Cor}] o accelerazione “complementare” (o anche “deviatrice”); il termine $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$ è detto “accelerazione centripeta” [\vec{a}_{cen}] o anche accelerazione “di trascinamento”.

La (5.14) si scrive pertanto anche nella forma seguente:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_{Cor} + \vec{a}_{cen} \quad (5.14a)$$

Va notato infine che:

l'accelerazione di Coriolis *dipende dalla velocità e non dalla posizione*:

l'accelerazione centripeta *dipende dalla posizione e non dalla velocità*:

l'accelerazione centripeta è *l'accelerazione di trascinamento*, cioè l'accelerazione del mobile pensato *solidale* al sistema rotante.

5.4 – Sistemi di riferimento non inerziali.

Ricordiamo la legge che esprime la relazione fra l'accelerazione di un punto P , osservata da un osservatore inerziale $O(x,y,z)$, e quella misurata da un altro osservatore non inerziale $O'(x',y',z')$, rotante rispetto a O con velocità angolare costante $\vec{\Omega}$ (fig. 5.4).

Sia, in questo caso, $O = O'$

Posto:

$$\vec{R} = P - O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad e \quad \vec{R}' = P - O' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}', \quad \vec{R} = \vec{R}', \quad (5.15)$$

tale legge vale:

$$\left[\frac{d\vec{U}_i}{dt} \right]_i = \left[\frac{d\vec{U}_r}{dt} \right]_r + \bar{\Omega} \times \frac{d\vec{R}}{dt} = \left[\frac{d\vec{U}_r}{dt} \right]_r + 2\bar{\Omega} \times \vec{U}_r + \bar{\Omega} \times (\bar{\Omega} \times \vec{R}) = \bar{a}_r + \bar{a}_{co} + \bar{a}_{cpt} \quad (5.16)$$

dove i pedici “i” e “r” indicano velocità e operatori di derivazione delle velocità rispettivamente in O e in O’.

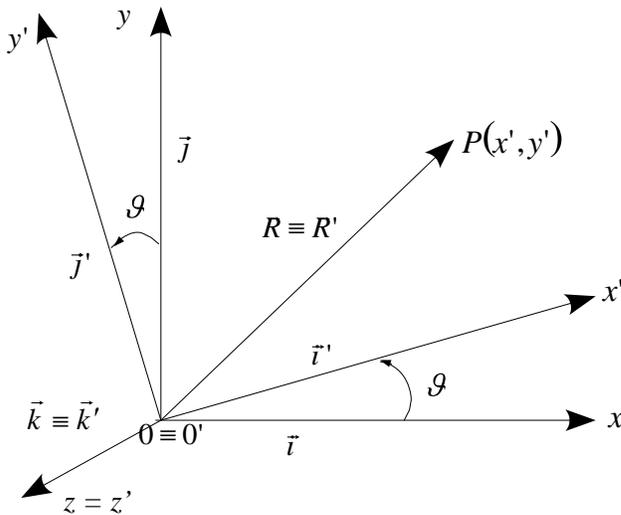


Fig. (5.5)

Il significato dei vari termini che compaiono al penultimo e all'ultimo membro della (5.16) (che è la legge di variazione temporale del vettore velocità inerziale \vec{U}_i visto da O nel riferimento O') è il seguente: il primo termine rappresenta l'accelerazione di P misurata rispetto a O' (accelerazione relativa), il secondo termine è l'accelerazione di Coriolis (o complementare) e il terzo termine è l'accelerazione centripeta (o di trascinamento). La somma di queste tre accelerazioni corrisponde all'accelerazione assoluta; le ultime due

accelerazioni sono del tipo cosiddetto *non inerziale*, o apparente, in quanto sono originate dai moti rotatori degli assi con i quali sono solidali gli osservatori e non contribuiscono a far variare la quantità di moto *assoluta* del punto.

La (5.16) mostra che un moto assoluto non accelerato ($\vec{a}_i = 0$) può invece apparire accelerato all'osservatore terrestre ($\vec{a}_r = -\vec{a}_{co} - \vec{a}_{cpt} = -\vec{a}_{co_o} + \vec{a}_{ctfg}$).

Applicando le relazioni di trasformazione dei versori (\vec{i}, \vec{j}) nei versori (\vec{i}', \vec{j}') [vedi Appendice 5.a, al fondo del capitolo], si può dare alla (5.16) la seguente espressione in componenti cartesiane di O' mostrate dalle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{U}_i}{dt} \right)_i = \vec{a}_i = & \frac{d^2 x'}{dt^2} \vec{i}' + \frac{d^2 y'}{dt^2} \vec{j}' + \frac{d^2 z'}{dt^2} \vec{k}' + \text{(accelerazione relativa, } \vec{a}_r) \\ & + x' \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} + y' \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} + z' \frac{d^2 \vec{k}'}{dt^2} + \text{(accelerazione centripeta, o di trascinamento, } \vec{a}_t) \quad (5.17) \\ & + 2 \left(\frac{dx'}{dt} \frac{d\vec{i}'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\vec{j}'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\vec{k}'}{dt} \right) \text{(accelerazione complementare, o di Coriolis, } \vec{a}_c) \end{aligned}$$

Se non fosse stato $O = O'$, l'accelerazione di trascinamento \vec{a}_t avrebbe avuto in più, come già detto ripetutamente, il termine \vec{a}'_o , esprimente l'accelerazione di O' rispetto a O. Infine, in questo esempio, il terzo termine dell'accelerazione di Coriolis è nullo perché l'asse z ruota solo intorno a sé stesso, per cui $\vec{k}' = cost$.

Le (5.17) chiariscono immediatamente perché al secondo termine dell'ultimo membro si è dato il nome di accelerazione di trascinamento. Tale termine, infatti, diviene l'accelerazione \vec{a}_i , misurata da O, di un punto P quando quest'ultimo sia trascinato solidalmente con O' (per questo punto, x' , y' e z' sono costanti, il che fa annullare le altre due accelerazioni).

5.5 – Coordinate locali tangenti sulla piattaforma.

Per lo studio dei movimenti atmosferici sulla Terra, risulta necessario riferirsi a un sistema locale di coordinate cartesiane ortogonali. Una prima rappresentazione estremamente semplificata [Fig. (5.6a)] mostra la corrispondenza fra un' area scelta sulla superficie sferica della Terra e la sua proiezione assiale sul piano equatoriale.

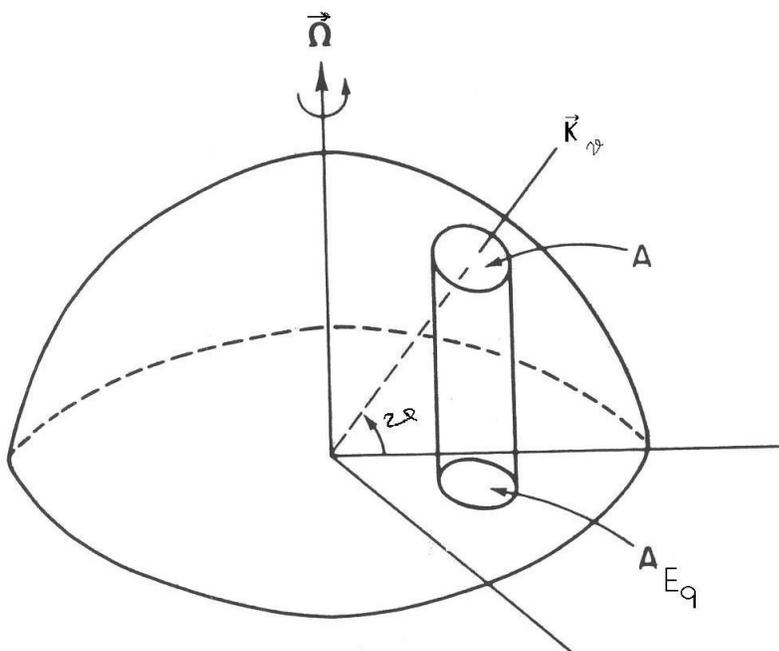


Fig. (5.6a)

Una rappresentazione piu' completa delle caratteristiche del sistema locale di coordinate cartesiane sulla superficie equatoriale e' invece rappresentata nella Fig. (5.6b).

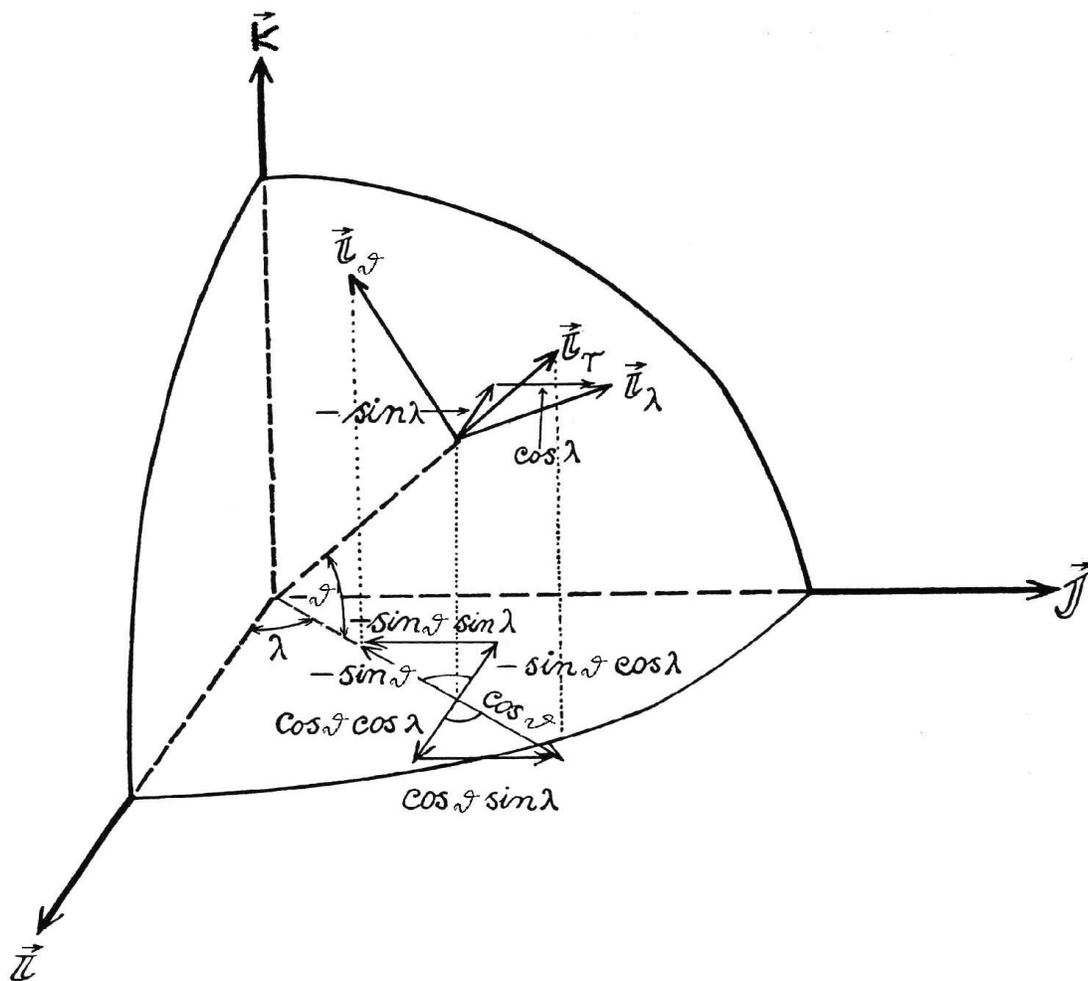


Fig. (5.6b)

Poiché questo nuovo riferimento è stazionario rispetto a O' (centro di rotazione della piattaforma), le equazioni (5.16) e (5.17) si trasformano senza particolari difficoltà.

Ricaviamo dapprima espressioni semplificate delle nuove equazioni riferendoci ancora alla piattaforma che abbiamo utilizzato per approssimare la Terra; le coordinate (X,Y) del piano tangente alla sfera in O'' fig. (5.6b) si proiettano [come anche il vettore \vec{U}_r , non mostrato nella figura (5.6b)] sulla piattaforma zonale alla latitudine θ [come mostrato in fig. (5.7)]. In realtà, nella figura (5.6b) la proiezione è stata fatta sul piano equatoriale per rendere più chiara e visibile la situazione. Questa operazione dà luogo alle cosiddette coordinate tangenti x e y . L'asse Z, perpendicolare al piano della piattaforma, non viene considerato, in quanto siamo qui interessati a moti orizzontali. Un'altra osservazione è che, come si è già visto nella figura (3.3) del Par. 3.2 della Statica, il vettore \vec{g} esprime la gravità apparente, **non** è più parallelo al raggio terrestre (come la gravità assoluta \vec{g}^*) per via della sua composizione con l'accelerazione centrifuga (l'effetto è però estremamente modesto, per cui l'approssimazione fatta è ampiamente giustificata).

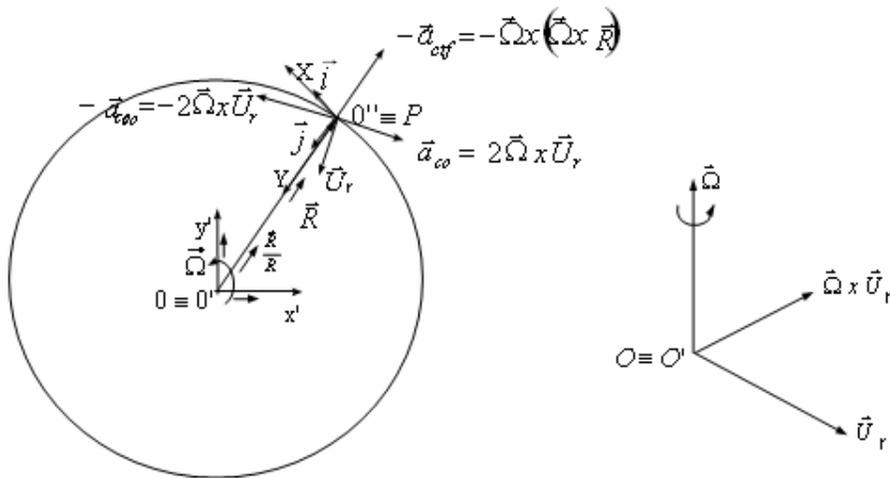


Fig. 5.7

Esaminiamo allora, in questa proiezione del piano tangente alla Terra alla latitudine θ (che immaginiamo di avere fatto sul piano zonale alla medesima latitudine), un caso di moto assoluto uniforme di un punto P , ossia con legge di moto data da: $\left(\frac{d\vec{U}_i}{dt}\right)=0$.

Consideriamo, per semplicità, il punto P nel momento in cui viene a trovarsi sufficientemente vicino a O'' , così da poterlo considerare coincidente con esso. Con queste ipotesi, ci troviamo a considerare un moto *locale* per il quale le coordinate possono essere considerate rettilinee, ossia esenti dagli effetti della curvatura della superficie sferica della Terra. Il termine che, nella (5.6), esprimeva l'accelerazione di trascinamento \vec{a}_t , viene allora inglobato nell'accelerazione (centripeta) $\vec{a}_{O''}$ di $O'' (= P)$ rispetto a $\theta = O'$, accelerazione che ha la direzione e il verso del versore \vec{j} dell'asse Y il quale, a sua volta, ha orientamento opposto a quello dell'asse \vec{R} .

Tenendo quindi conto degli opposti orientamenti che ora hanno i due vettori \vec{j} e $\vec{R}=P-O'$, per cui l'asse Y è orientato come $-\vec{R}=O'-P$, e del fatto che $X_p = Y_p = 0$ mentre il valore di $\left|\frac{d^2\vec{i}}{dt^2}\right|$ e $\left|\frac{d^2\vec{j}}{dt^2}\right|$ continua a essere Ω^2 , le (5.17) divengono, in (X, Y) :

$$(a_r)_X + (-2\Omega v_r) = 0 \quad (5.18)$$

$$(a_r)_Y + 2\Omega u_r + \Omega^2 R = 0 \quad (5.19)$$

come era da attendersi, essendo il moto stazionario, ossia:

$$(a_r)_X = +2\Omega v_r \quad (5.20)$$

$$(a_r)_Y = -2\Omega u_r - \Omega^2 R \quad (5.21)$$

Con u_r e v_r si sono indicate le componenti della velocità \vec{U}_r di P nel nuovo riferimento (X, Y) solidale con O'' . Y è stato orientato verso O' perchè, nella attuale approssimazione *piatta* della Terra, questo ultimo punto rappresenta la proiezione del Polo Nord sul piano equatoriale (piattaforma), mentre l'asse X è tangente ai paralleli (bordo della piattaforma) ed è orientato da Ovest verso Est.

Con queste convenzioni, diamo a u_r e v_r i nomi, rispettivamente, di *velocità zonale* (componente longitudinale) e di *velocità meridionale* (componente latitudinale), anche se, a rigore, tale denominazione spetterebbe alle velocità definite rispetto alle coordinate curvilinee sulla superficie (sferica) terrestre [vedi § 5.7]. Comunque, le (5.20) e (5.21) danno già informazioni fondamentali sulle caratteristiche dei moti relativi sulla Terra. Supponendo che la rotazione $\bar{\Omega}$ della piattaforma sia, come la rotazione della Terra, in senso antiorario (emisfero Nord), la (5.20) ci mostra che l'accelerazione di Coriolis, agente sulla componente Y della velocità relativa e diretta secondo l'asse X , è positiva se anche quest'ultima è positiva ($v_r > 0$); una particella fluida che si muova verso l'interno della piattaforma (ossia, verso Nord sulla sfera terrestre) è accelerata nel verso positivo delle X , ovvero verso destra. Se invece la particella è in moto verso l'esterno ($v_r < 0$), ovvero verso Sud sulla sfera terrestre, essa viene accelerata nel verso negativo delle X e, quindi, ancora verso destra. Questa è la proprietà che caratterizza i movimenti delle masse d'aria nell'emisfero Nord della Terra mentre, nell'emisfero Sud, ove la rotazione terrestre è in senso orario, le accelerazioni di Coriolis sono orientate verso la sinistra rispetto al verso del moto dell'aria.

Per quanto riguarda la componente Y dell'accelerazione di Coriolis, dalla (5.21) si vede che essa è diretta verso l'esterno della piattaforma se ($u_r > 0$) e

verso l'interno se ($u_r < 0$), ossia anche in questo caso l'accelerazione di Coriolis *agisce sulla destra* del verso di moto dell'aria.

Sulla Terra, come già detto, la seconda accelerazione apparente nella (5.21) risulta quasi ovunque trascurabile rispetto alla prima, ossia all'accelerazione di Coriolis. Infatti, valori tipici del rapporto fra la velocità tangenziale della Terra U e le velocità più elevate del vento zonale in quota [$u_r \cong 50 \text{ms}^{-1}$] sono dell'ordine di 10 all'equatore, 8 a 30°N , 5 a 60°N e 2 a 8°N . Più vicino alla superficie, dove i valori del vento sono dell'ordine dei $5\text{-}10 \text{ m s}^{-1}$, si hanno valori tipici dei sopramenzionati rapporti che arrivano anche a 150, per cui in quasi tutti i casi si considera, come accelerazione apparente lungo la direzione x , la sola accelerazione di Coriolis.

Ripetiamo ancora che quest'ultima accelerazione dipende dalla velocità angolare $\bar{\Omega}$ della Terra e dalla velocità (u_r, v_r) della particella relativa alla Terra.

5.6 – Equazione vettoriale del moto sulla Terra rotante.

Ricordando le espressioni per le forze reali e apparenti per unità di massa ricavate nei paragrafi (5.2) e (5.3), possiamo scrivere la forma più generale delle equazioni del moto, riferite ad un sistema rotante, utilizzando l'apice o il pedice per indicare le velocità e le accelerazioni relative.

La seconda legge della dinamica:

$$\left(\frac{d\vec{U}}{dt} \right)_i = \sum_1^n \vec{F}_i \quad (5.22)$$

con $\sum_1^n \vec{F}_i$ rappresentante la composizione di tutte le n forze reali che agiscono sull'unità di massa, deve venire trasformata in modo da far comparire le accelerazioni apparenti. Pertanto, se le forze reali per unità di massa sono la forza $-\frac{1}{\rho} \nabla p$ esercitata dal gradiente di pressione ∇p , la forza di gravità \vec{g} e la forza d'attrito fluido turbolento \vec{f}_r , la legge vettoriale del moto per unità di massa riferita al sistema non inerziale sarà:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = -2\vec{\Omega} \times \vec{U} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{g} + \vec{f}_r \quad (5.23)$$

avendo inglobato l'accelerazione (apparente) centrifuga nella gravità assoluta g^* .

L'equazione (5.23) stabilisce che l'accelerazione di una particella d'aria nel suo moto relativo rispetto ad una terna di riferimento rotante è data dalla somma algebrica delle accelerazioni dovute alle forze di Coriolis, della gravità *apparente*, del gradiente di pressione e dell'attrito.

5.7 – Rappresentazione dell'equazione del moto in coordinate polari sulla sfera (Coordinate terrestri geografiche).

Poiché la Terra ha forma sferica, conviene sviluppare un metodo che dia la rappresentazione delle equazioni del moto in coordinate adeguate a tale geometria. Le coordinate più opportune risultano essere le coordinate polari sulla sfera. I risultati che otterremo, anche se sono stati già parzialmente visti

nello sviluppo delle componenti delle accelerazioni apparenti, saranno utili per la comprensione di altri importanti processi fisici.

Le coordinate polari sulla sfera che adottiamo per la Terra (la cui superficie diviene pertanto una superficie coordinata) sono λ (longitudine), ϑ (latitudine) e $z = r - a$ (altezza sulla superficie del piano tangente locale, vedi § 3.2).

Orientati i 3 versori \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} di queste coordinate rispettivamente verso Est, verso Nord e verso l'alto (cioé sul proseguimento del raggio terrestre in ogni punto della sfera), la velocità relativa \vec{u} si esprimerà come:

$$\vec{u} = \vec{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w$$

dove le tre componenti u, v e w sono definite dalle relazioni:

$$u \rightarrow r \cos \vartheta \frac{d\lambda}{dt}; \quad v \rightarrow r \frac{d\vartheta}{dt}; \quad w \rightarrow \frac{dz}{dt}$$

essendo:

r = distanza del punto P dal centro della Terra = $a + z$, con:

a = raggio della Terra.

Poiché $z \ll a$, in genere si pone $r = a = \text{cost}$ [vedi anche § 3.2]

Con ciò, si può scrivere (vedi figure 5.12 e 5.13)

$$\delta x = a \cos \vartheta \delta \lambda \qquad \delta y = a \delta \vartheta \qquad (5.24)$$

da cui:

$$u \rightarrow \frac{\delta x}{\delta t} \quad v \rightarrow \frac{\delta y}{\delta t}$$

con x e y coordinate di un sistema curvilineo non cartesiano avente i versori non costanti, bensì funzione della posizione sulla Terra sferica.

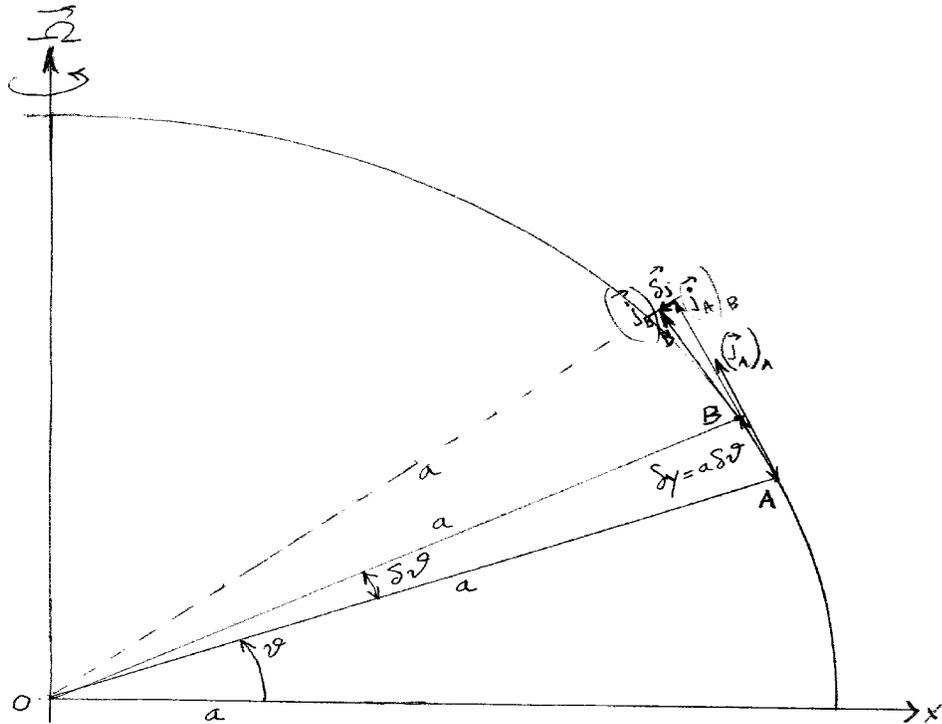


Fig. (5.12)

Queste dipendenze dei versori dalla posizione e dagli spostamenti del punto P sulla Terra vanno tenute presenti quando il vettore accelerazione viene sviluppato nelle sue componenti in coordinate geografiche.

Di conseguenza:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{i} \frac{du}{dt} + \vec{j} \frac{dv}{dt} + \vec{k} \frac{dw}{dt} + u \frac{d\vec{i}}{dt} + v \frac{d\vec{j}}{dt} + w \frac{d\vec{k}}{dt} \quad (5.26)$$

Analizziamo ora ciascuno dei tre termini della (5.26) esprimenti la variazione sostanziale, o totale, dei versori \vec{i}, \vec{j} e \vec{k} .

La variazione totale di \vec{i} con il tempo è data, ricordando la definizione di differenziazione totale, da:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = u \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} \quad (5.27)$$

Infatti, \vec{i} è funzione della longitudine, ossia della distanza angolare lungo i paralleli, detta anche distanza *zonale*, ma non della latitudine $\left[\frac{\partial \vec{i}}{\partial y} = 0 \right]$.

Con riferimento alla figura (5.13), si vede che il modulo $\left| \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} \right|$ del vettore

$\frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$ vale:

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{|\delta \vec{i}|}{\delta x} = \left| \frac{\partial \vec{i}}{\partial x} \right| = \frac{1}{a \cos \vartheta}$$

essendo $|\delta \vec{i}| = \delta \lambda$ ⁷.

⁷ Tenuto conto del fatto che \vec{i} e $\vec{i} + \delta \vec{i}$ sono entrambi vettori unitari, di modulo 1

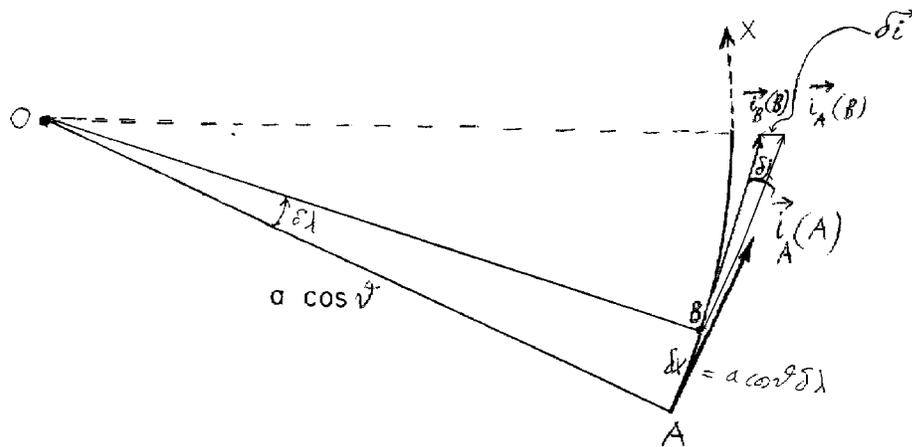


Fig. (5.13)

Al limite per $\delta\lambda \rightarrow 0$, anche $\delta x \rightarrow 0$, e il vettore $\frac{\partial \vec{i}}{\partial x}$ è diretto verso l'asse di rotazione; esso, quindi, ha componenti sia nella direzione \vec{j} sia nella direzione \vec{k} [vedi fig. (5.14)], cosicché:

$$\frac{\partial \vec{i}}{\partial x} = \frac{1}{a \cos \vartheta} (\vec{j} \sin \vartheta - \vec{k} \cos \vartheta)$$

Quindi, ricordando la (5.27), si ottiene:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{u}{a \cos \vartheta} (\vec{j} \sin \vartheta - \vec{k} \cos \vartheta) \quad (5.28)$$

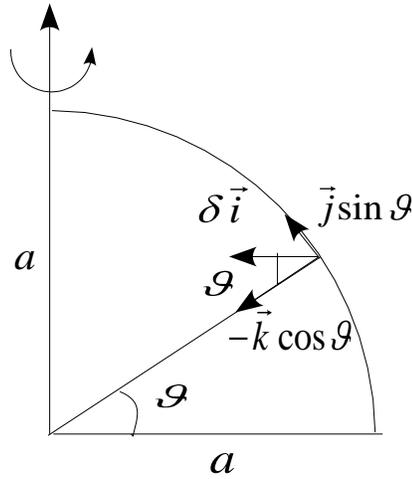


Fig. (5.14)

Passando ora a $\frac{d\vec{j}}{dt}$, osserviamo che \vec{j} è funzione soltanto di x e y , per cui avremo un $\delta_{lo}\vec{j}$ (secondo la longitudine) e un $\delta_{la}\vec{j}$ (secondo la latitudine).

Con riferimento alla fig. (5.11), si può vedere che $|\delta_{lo}\vec{j}| = \frac{\delta x}{a/\text{tg}\vartheta}$.

Il vettore $\frac{\partial\vec{j}}{\partial x}$, per spostamenti longitudinali $\delta x > 0$, è diretto verso le x negative, per cui:

$$\frac{\partial_{lo}\vec{j}}{\partial x} = -\frac{\text{tg}\vartheta}{a}\vec{i}$$

Per spostamenti latitudinali verso nord ($\delta y > 0$), si ha che $|\delta_{la}\vec{j}| = \delta\vartheta$. Essendo $\delta y = a\delta\vartheta$ ed essendo $\delta\vec{j}$ diretto verso il basso (sempre per $\delta y > 0$), si ottiene:

$$\frac{\partial_{la}\vec{j}}{\partial y} = -\frac{\vec{k}}{a}$$

In definitiva :

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -u \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{a} \vec{i} - \frac{v}{a} \vec{k} \quad (5.29)$$

Similmente, si trova, per le variazioni del versore \vec{k} :

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{i} \frac{u}{a} + \vec{j} \frac{v}{a} \quad (5.30)$$

Sostituendo le (5.28), (5.29) e (5.30) nella (5.26), si ottiene:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{du}{dt} - \frac{uvtg\vartheta}{a} + \frac{uw}{a} \right) \vec{i} + \left(\frac{dv}{dt} + \frac{u^2tg\vartheta}{a} + \frac{wv}{a} \right) \vec{j} + \left(\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{a} \right) \vec{k} \quad (5.31)$$

Dopo avere espresso le accelerazioni in coordinate polari sulla sfera, ricordiamo che la forza di gradiente di pressione per unità di massa ha, in queste coordinate, la forma:

$$\vec{f}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -\frac{1}{\rho a \cos \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \vec{i} - \frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} \vec{j} - \frac{\partial p}{\rho \partial z} \vec{k}$$

e la gravità apparente:

$$\vec{g} = -\frac{1}{a \cos \vartheta} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \vec{i} - \frac{1}{a} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \vec{j} - \frac{\partial \phi}{\partial z} \vec{k}$$

essendo ϕ il geopotenziale della forza gravitazionale e centrifuga.

A questo punto, le tre componenti dell'equazione del moto (5.23), in coordinate polari su sfera rotante, divengono (trascurando g_x^* e g_y^*):

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \operatorname{tg} \vartheta}{a} + \frac{uw}{a} = -\frac{1}{\rho a \cos \vartheta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + 2\Omega v \sin \vartheta - 2\Omega w \cos \vartheta + F_x \quad (5.32)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \operatorname{tg} \vartheta}{a} + \frac{vw}{a} = -\frac{1}{\rho a} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} - 2\Omega u \sin \vartheta + F_y \quad (5.33)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + 2\Omega u \cos \vartheta + F_z \quad (5.34)$$

I termini proporzionali a $1/a$, al primo membro delle equazioni, sono detti termini di accelerazione di curvatura, o più semplicemente, di derivata di curvatura, dovuti alla curvatura delle coordinate terrestri; essi rappresentano la correzione *geometrica* da apportare all'accelerazione relativa nel sistema non inerziale terrestre e, a differenza delle accelerazioni di Coriolis e di quella centripeta, non dipendono dalla rotazione terrestre e dalla non-inerzialità del suo sistema di coordinate, ma solo dalla non-rettilineità di queste ultime, e possono essere trascurati nei moti a scala sinottica alle medie latitudini, come si è già anche detto in precedenza.

5.8 – Approssimazione di equilibrio, o geostrofica.

Per ciascuna scala di moto che venga considerata, le equazioni primitive (5.32) ÷ (5.34) contengono termini i cui ordini di grandezza sono diversi fra di loro.

Come vedremo più avanti, facendo l'analisi di scala delle equazioni del moto, nell'atmosfera libera sulla scala sinottica (al di sopra dei 2000 metri di altezza) le accelerazioni inerziali, i termini di curvatura e i termini di attrito

che compaiono nelle equazioni (5.32) e (5.33) divengono (con diversi ordini di approssimazione) trascurabili rispetto ai soli termini di gradiente orizzontale di pressione e di accelerazione di Coriolis. Sempre sulla scala sinottica, un discorso a parte si deve invece fare, come vedremo nel seguito, per l'equazione (5.34). Le equazioni del moto (5.25) riferite a tale scala e con le condizioni riguardanti l'importanza relativa dei vari termini che ne conseguono, assumono, alla latitudine media $\vartheta_o = 45^\circ$, ove il parametro di Coriolis ha il valore:

$$f_o = 2\Omega \sin \vartheta_o = 10^{-4} s^{-1}, \quad (5.35)$$

la semplice forma approssimata:

$$-f_o v \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad f_o u \cong -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.36)$$

nota come approssimazione *geostrofica*.

Non comparso il tempo (nell'ipotesi fatta di stazionarietà, conseguente ai piccoli valori delle accelerazioni), le (5.36) sono, a tutti gli effetti, equazioni diagnostiche e non prognostiche e quindi non idonee a prevedere l'evoluzione dinamica del sistema atmosferico. Esse rappresentano pertanto un modello ideale di stato di equilibrio dell'atmosfera per il quale si dovrebbero ipotizzare moti uniformi su percorsi rettilinei di estensione illimitata.

Il particolare valore del vento orizzontale $\vec{V}_g = \vec{i}u_g + \vec{j}v_g$ che soddisfa le (5.36)

è detto vento geostrofico. Dall'equazione vettoriale (5.23)

$[\vec{k} \times \vec{V}_g = -\frac{1}{\rho} \nabla_H p]$, si ricava⁸:

$$\vec{V}_g = \vec{k} \times \frac{1}{\rho f} \nabla_H p \quad (5.37)$$

Come mostrato dalle (5.36) e (5.37), la distribuzione orizzontale della pressione determina il vento geostrofico. Quest'ultimo, pur essendo una idealizzazione del vento reale, tanto meno soddisfacente quanto più ci si avvicina alla superficie terrestre, rappresenta tuttavia una approssimazione che si rivela assai utile per trattare i moti atmosferici a grande scala.

Per avvicinarsi alla situazione reale, nella quale si osserva che il campo del vento ha una evoluzione nel tempo, ossia esistono i termini esprimenti le accelerazioni, modifichiamo le (5.36) come segue:

$$\frac{du}{dt} - fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (5.38)$$

in cui i due termini non stazionari $\frac{du}{dt}$ e $\frac{dv}{dt}$ che sono stati aggiunti

rappresentano, come risulterà più chiaro quando considereremo l'analisi di scala sinottica, la reazione dinamica, o il *riaggiustamento*, agli squilibri fra i

⁸ applicando il semplice algoritmo vettoriale:

$$\begin{aligned} 2\vec{\Omega} \times \vec{k} \times \vec{V}_g &= -\frac{1}{\rho} \nabla_H p \Rightarrow \vec{k} \times \vec{V}_g = -\frac{1}{2\rho\Omega} \nabla_H p \Rightarrow \vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{V}_g) = \\ &= -\vec{k} \times \frac{1}{2\rho\Omega} \nabla_H p \Rightarrow -\vec{V}_g = -\vec{k} \times \frac{1}{2\rho\Omega} \nabla_H p \Rightarrow (5.37) \end{aligned}$$

termini di Coriolis e quelli di gradiente orizzontale di pressione nel corso dell'evoluzione temporale dello stato atmosferico.

Le (5.38) sono le più semplici equazioni prognostiche dei moti atmosferici. L'importanza dei termini inerziali (accelerazioni) rispetto ai termini di Coriolis è espressa dal rapporto delle rispettive accelerazioni di scala. La scala caratteristica delle accelerazioni inerziali è suggerita dalla parte avvertiva $[(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U}]$ dell'accelerazione ed è dell'ordine di U^2/L , dove U e L sono rispettivamente la scala di velocità e la scala geometrica; la scala caratteristica delle accelerazioni di Coriolis è invece $f_o U$; quindi, il rapporto:

$$R_o = \frac{\frac{U^2}{L}}{f_o U} = \frac{U}{f_o L} \quad (5.39)$$

detto numero di Rossby, esprime, con il suo valore numerico, il limite di validità della approssimazione geostrofica. Ovviamente, quest'ultima è tanto migliore quanto minore è il valore di R_o (teoricamente, dovrebbe essere $R_o = 0$).

5.9 – Approssimazione idrostatica.

Vedremo più avanti (§5.12.1) come un'analisi di scala della (5.34), ossia della componente verticale $[dw/dt]$ dell'equazione del moto, indichi che i termini in essa predominanti nei moti sulla scala sinottica sono $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ e $-g$ (i cui ordini di grandezza sono $O=(10 \text{ ms}^{-2})$, ossia di un fattore 10^8 più elevati rispetto a quello della accelerazione verticale dw/dt il cui ordine di grandezza di scala è 10^{-7} ms^{-2}).

Occorre quindi che tali termini si bilancino fra di loro in modo che la loro risultante sia tanto piccola [$O=(10^{-7}ms^{-2})$] da dare luogo alle condizioni che assicurino il cosiddetto equilibrio idrostatico. Detto in altre parole, occorre che, nei moti sinottici, la pressione atmosferica continui ad essere, in ogni punto e a ogni istante di tempo, uguale al peso della sovrastante colonna d'aria di sezione unitaria.

Va tuttavia subito detto che un'analisi di scala sulla componente verticale dell'equazione del moto, che si limiti alle considerazioni sopra riportate, rischia di essere incompleta, se non addirittura fuorviante. Non basta infatti soltanto dimostrare che il termine dw/dt è piccolo rispetto all'accelerazione di gravità g , ma occorre essere in grado di verificare che tale condizione continui a valere, sulla scala sinottica, anche in presenza di campi perturbati di velocità orizzontale dell'aria e, quindi, anche di campi orizzontali di pressione a diversi livelli.

Poiché, come sappiamo, tali campi perturbati di velocità sono - a ciascuna quota - direttamente accoppiati alle perturbazioni (nel tempo e nello spazio) del campo di pressione sulla corrispondente superficie orizzontale, può accadere che - in presenza di un campo di pressione orizzontale le cui perturbazioni p_1' a una certa quota " z_1 " non siano coerenti, nello spazio e nel tempo, con quelle p_2' a una certa altra quota " z_2 " - si possano generare, fra queste due quote, non trascurabili fluttuazioni "incoerenti" e "libere" dei gradienti verticali di pressione, i cui valori, ove non più vincolati da una condizione di idrostaticità assicurata da un adeguato riaggiustamento istantaneo della densità - possano essere tali da generare accelerazioni verticali dw/dt che non rispettino più la condizione di essere piccole rispetto all'accelerazione di gravità g .

In altre parole, poiché in generale la pressione ha, nei vari piani orizzontali, una certa variabilità alla quale sono associati i movimenti orizzontali dell'aria

alle varie quote, è necessario vedere se le cose vanno in modo che si stabilisca, istante per istante e livello per livello, un aggiustamento “idrostatico” fra i cambiamenti dei gradienti verticali di pressione conseguenti alle variazioni orizzontali di pressione e i cambiamenti orizzontali del campo di densità dell’aria frapposta fra i vari livelli.

Se si può dimostrare che questi aggiustamenti intervengono simultaneamente e con lo stesso ordine di grandezza, la condizione di equilibrio idrostatico può costituire ancora una soddisfacente approssimazione.

Per dimostrare che la condizione $[dw/dt \ll g]$ continua a valere sulla scala sinottica è quindi richiesta una ulteriore analisi di scala, di tipo *perturbativo*, la quale evidenzia come - sulla scala sinottica e ad ogni quota “z” - anche la variazione casuale della componente orizzontale del campo della pressione ai vari livelli riesca a preservare l’equilibrio idrostatico grazie a una contestuale e adeguata variazione orizzontale del campo di densità.

Effettuiamo tale analisi perturbativa definendo campi verticali di pressione $\{p_o(z)\}$ e di densità $\{\rho_o(z)\}$ come medie orizzontali rispetto a x , y e t a ciascuna altezza z , soddisfacenti alla condizione di equilibrio idrostatico esatto:

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{dp_o}{dz} = -g \quad (5.40)$$

Scomponiamo i campi effettivi della pressione e della densità nella loro componente media sopra definita e nella perturbazione legata ai movimenti dell’aria:

$$p(x,y,z,t) = p_o(z) + p'(x,y,z,t) \quad (5.41)$$

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_o(z) + \rho'(x,y,z,t)$$

Combinando le (5.40) e (5.41) e ponendo $\rho'/\rho_o \ll 1$ ⁹, cosicché - trascurando infinitesimi di ordine superiore al primo - si possa scrivere:

$$(\rho_o + \rho')^{-1} = \frac{(\rho_o - \rho')}{(\rho_o + \rho')(\rho_o - \rho')} = \frac{\rho_o - \rho'}{\rho_o^2 - \rho'^2} \cong \frac{1}{\rho_o^2} (\rho_o - \rho') \cong \rho_o^{-1} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_o}\right),$$

si trova:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = -\frac{1}{(\rho_o + \rho')} \frac{\partial}{\partial z} (p_o + p') - g \cong \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\rho'}{\rho_o} \frac{dp_o}{dz} - \frac{\partial p'}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_o} \left(\rho' g + \frac{\partial p'}{\partial z} \right) \quad (5.42)$$

con il che l'equazione dell'equilibrio idrostatico si riduce a un'espressione formata dai soli termini perturbati.

Nei moti a scala sinottica, tali termini sono dell'ordine:

$$\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial p'}{\partial z} \cong \left(\frac{\Delta_H p'}{\rho_o H} \right) \cong 10^{-1} ms^{-2} \quad \text{e} \quad \frac{\rho' g}{\rho_o} \cong 10^{-1} ms^{-2} \quad (5.42a)$$

dove H è l'altezza di scala della troposfera [vedi fine § 3.8] e $\Delta_H p \cong 10^3 Pa$ rappresenta la scala sinottica delle variazioni orizzontali di pressione, mentre, con riferimento alla tabella [5.2] del successivo § 5.12.1, il risultato ottenuto mostra che le accelerazioni di scala associate ai due termini perturbati della pressione e della densità sono ¹⁰, singolarmente, alcuni ordini di grandezza maggiori di quelle associate agli altri termini della (5.34) ¹¹ (in particolare

⁹ Tale condizione è verificata nei moti *sinottici* dell'atmosfera, in quanto ρ' è dell'ordine di $10^2 \rho$.

¹⁰ In valore assoluto

¹¹ Vedere il testo di J.R.Holton: An Introduction to Dynamic Meteorology pag. 42 - Academic Press, 1992.

della accelerazione dw/dt) e devono pertanto essere, fra di loro, uguali in valore assoluto ma di segno opposto, così da dare: $\frac{\partial p'}{\partial z} + \rho'g \cong 0$ ¹².

Infatti, se scriviamo, partendo dalla (5.42), che:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g = \frac{1}{\rho_o} \left[-\frac{dp_o}{dz} - \rho_o g \right] - \frac{1}{\rho_o} \left[\rho'g + \frac{\partial p'}{\partial z} \right] = 0 - \frac{1}{\rho_o} \left[\rho'g + \frac{\partial p'}{\partial z} \right] \quad (5.42b)$$

ossia sottraiamo da essa il termine all'equilibrio $\left[-\frac{1}{\rho_o} \frac{dp_o}{dz} - g \right]$ che è identicamente nullo, restando con il termine che compare all'ultimo membro della (5.42), e paragoniamo il risultato della (5.32a) con quello dell'analisi sulla scala sinottica della componente verticale dell'equazione del moto, vediamo che la coppia $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$ viene suddivisa nella componente all'equilibrio $-\frac{1}{\rho_o} \frac{dp_o}{dz} - g = 0$ e in quella perturbata $-\frac{1}{\rho_o} \left(\rho'g + \frac{\partial p'}{\partial z} \right)$.

Ma dalla Tabella 5.2 dell'analisi di scala del § 5.12.1 si evince che l'espressione $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g$, i cui singoli termini sono $O[10ms^{-2}]$, deve equilibrarsi almeno entro una differenza massima di $O[10^{-3}ms^{-2}]$, corrispondente all'ordine di grandezza dell'accelerazione di Coriolis, se non addirittura di $O[10^{-7}ms^{-2}]$ se si considera quello dell'accelerazione verticale

$$\frac{dw}{dt}.$$

¹² Ciò significa, in altre parole, che $\frac{\partial p'}{\partial z}$ e $\rho'g$, pur avendo ciascuno valore di scala dell'ordine di

$10^1(Kg\ m^2\ s^{-2})$, devono avere segni opposti affinché la loro somma si *compensi* in un termine residuo il cui valore di scala sia molto più piccolo e possa quindi costituire un'equazione di equilibrio statico per le grandezze "perturbate".

Si può così concludere che anche il campo di perturbazione di pressione è in equilibrio idrostatico, entro una differenza massima di $O[10^{-3} m s^{-2}]$, con il campo di perturbazione della densità, per cui nei moti a scala sinottica le accelerazioni verticali sono trascurabili e, conseguentemente, non è possibile dedurre le velocità verticali dalla componente verticale delle equazioni del moto, essendo queste ultime sostituite dall'equazione della Statica (approssimazione idrostatica, entro – lo ripetiamo – un termine residuo dell'ordine di $10^{-7} ms^{-2}$).

5.10 - L'equazione di continuità.

Come il principio di conservazione della quantità di moto è espresso dalle equazioni della dinamica, così il principio di conservazione della massa è espresso dalla equazione di continuità. Per quanto detto nel Capitolo 1 (Introduzione), tale equazione può venire ricavata secondo due rappresentazioni, quella “Euleriana” e quella “Lagrangiana”.

5.10.1 - Derivazione Euleriana.

La derivazione Euleriana del bilancio di massa viene fatta considerando i flussi di massa entranti e uscenti attraverso le superfici immateriali (geometriche) di un cubo di osservazione fisso nello spazio, permeabili al loro passaggio.

Con riferimento alla fig. (5.15), il principio di conservazione della massa richiede che,

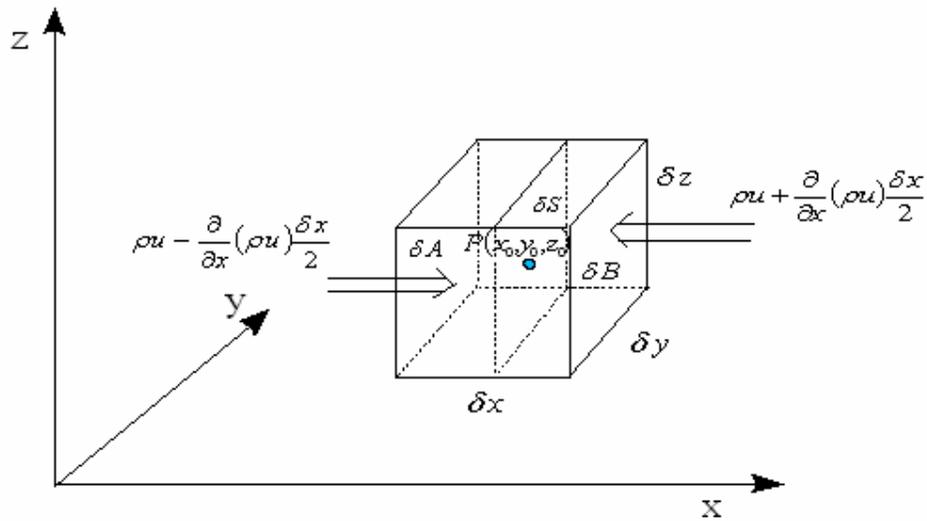
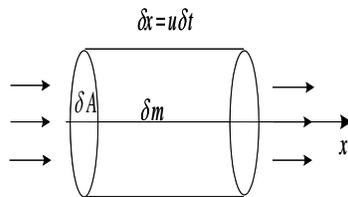


Fig. (5.15)

nel volume elementare $dx dy dz$, fisso rispetto alla terna di assi (x, y, z) e centrato intorno al punto $P(x_0, y_0, z_0)$, la differenza fra il flusso di massa che entra attraverso le tre pareti coordinate e quello che esce attraverso le corrispondenti pareti opposte, detta anche **flusso netto**, corrisponda all'accumulo, o allo svuotamento, di massa entro il volume stesso.

Consideriamo, dapprima, la coppia di pareti coordinate δA e δB .

Se, con riferimento alla figura (5.15) e alla nota a pié di pagina, indichiamo con $\bar{\varphi}_m = \rho \bar{U} \text{ (kg m}^{-2} \text{ s}^{-1})$ ¹³ il flusso di massa per unità di superficie e di tempo attraverso la superficie $\delta S = dy dz$, con $(\delta F_m)_{\delta A} = \rho \bar{U} \cdot \bar{n} \delta A = \bar{\varphi}_m \cdot \delta A \bar{n}$ il flusso di massa attraverso δA e con $(\delta F_m)_{\delta B}$ il flusso di massa attraverso



¹³

essendo

$$\delta m = \rho \delta A u \delta t \Rightarrow \rho u = \frac{1}{\delta A} \frac{\delta m}{\delta t} \text{ (kg m}^{-2} \text{ s}^{-1})$$

δB passante per $P(x_0, y_0, z_0)$, i flussi attraversanti dA e la corrispondente parete opposta dB saranno, rispettivamente:

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta A \quad \text{e} \quad \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta B$$

con $\delta A = \delta B = \delta y \delta z$. Il flusso netto lungo la direzione x attraverso il volume elementare fisso di osservazione sarà pertanto:

$$\left[\rho u - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z - \left[\rho u + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \frac{\delta x}{2} \right] \delta y \delta z = - \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) \delta x \delta y \delta z$$

Poiché espressioni simili si ottengono per le altre due direzioni, il flusso netto totale attraverso il volume elementare è dato da:

$$- \left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) \right] \delta x \delta y \delta z = - \nabla \cdot (\rho \vec{U}) \delta V$$

Per il principio di conservazione della massa prima enunciato, questo flusso netto deve corrispondere a una diminuzione o aumento di massa dentro δV , ossia:

$$- \nabla \cdot (\rho \vec{U}) \delta V = \frac{\partial}{\partial t}(\rho \delta V) = \frac{\partial \rho}{\partial t} \delta V \quad ^{14}$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \quad (5.43)$$

¹⁴ Valendo, per il volume Euleriano, **fisso e indeformabile**, la condizione $\frac{\partial}{\partial t}(\delta V) = 0$

La (5.43) è l'equazione di continuità nella rappresentazione Euleriana. Essa mostra che la variazione temporale assoluta *locale* di densità è uguale alla divergenza del flusso di massa (con il segno cambiato).

Se $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, è anche $\nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0$, ossia $\rho(\nabla \cdot \vec{U}) + \vec{U} \cdot \nabla \rho = 0$. Con questo, si vede

che la condizione $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ esprime solo una proprietà di incompressibilità locale,

avendosi, in questo caso, che $\vec{U} \cdot \nabla \rho = -\rho(\nabla \cdot \vec{U})$. La derivazione Lagrangiana del paragrafo 5.10.2 che segue aiuterà a capire meglio questo concetto.

5.10.2 – Derivazione Lagrangiana.

Consideriamo ora una massa dM , di volume $dV = dx dy dz$, che si muove (mantenendosi costante) con il flusso. Ricordiamo che, nella rappresentazione in variabili di Lagrange, ogni particella del fluido viene seguita individualmente nel suo moto. Questo significa anche che, se le particelle che vengono seguite appartengono all'istante iniziale a un volume dV racchiuso da una superficie chiusa dS , queste particelle, per definizione di rappresentazione Lagrangiana, non abbandoneranno mai il volume iniziale né attraverseranno la superficie dS . In altre parole, la superficie dS viene anche detta superficie materiale, perché rimane – nel tempo – sempre costituita dalle medesime particelle materiali. Pertanto, poiché $dM = \rho dV$ si conserva nel moto (pur potendo variare sia ρ sia dV individualmente), scriveremo che:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\delta M} \frac{d}{dt}(\delta M) &= \frac{1}{\rho \delta V} \frac{d}{dt}(\rho \delta V) = \frac{1}{\rho \delta V} \left[\rho \frac{d}{dt}(\delta V) + \delta V \frac{d\rho}{dt} \right] = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt}(\delta V) = \\
&= \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{\delta x} \frac{d}{dt}(\delta x) + \frac{1}{\delta y} \frac{d}{dt}(\delta y) + \frac{1}{\delta z} \frac{d}{dt}(\delta z) = 0
\end{aligned}
\tag{5.43a}$$

essendo $\delta V = \delta x \delta y \delta z$, per cui $\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt}(\delta V) = \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \frac{d}{dt}(\delta x \delta y \delta z)$

Con riferimento alla fig. (5.16), osserviamo che le due facce A e B dell'elemento *materiale* dV si muovono, con il flusso, con le velocità $U_A = \frac{dx}{dt}$ e $U_B = \frac{d(x + \delta x)}{dt}$ rispettivamente, per cui $U_B - U_A = \delta u = \frac{d(\delta x)}{dt}$.

Supposto che sia $U_B > U_A$, si ha la situazione rappresentata in fig. (5.16)

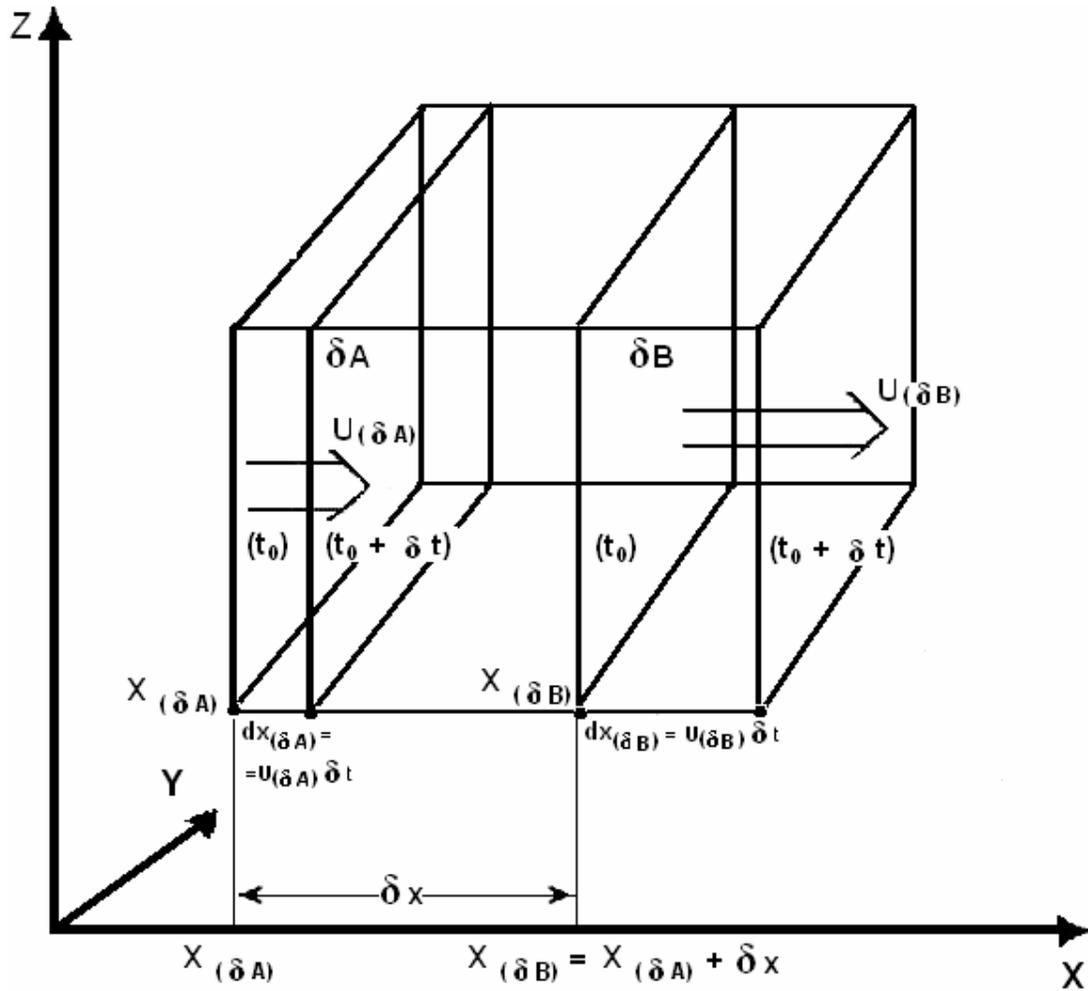


Fig.(5.16)

Ripetendo lo stesso ragionamento per le altre due coppie di superfici e passando al limite per un volume infinitesimo [$\delta x = \delta y = \delta z \Rightarrow 0$], avremo che:

$$\lim_{\delta x \delta y \delta z \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta V} \frac{d}{dt} (\delta V) \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{U}$$

Quindi, per $dV \rightarrow 0$, la (5.43a) diviene:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (5.44)$$

La (5.44) è l'equazione di continuità nella rappresentazione Lagrangiana. Essa fornisce anche una interpretazione fisica per l'operatore divergenza ($\nabla \cdot$), mostrando che esso, applicato al vettore velocità \vec{U} , esprime il rateo di variazione relativa di volume di una particella fluida quando il suo volume $dV \rightarrow 0$. Dalla (5.44) discende quindi anche la proprietà, posseduta dalla derivata totale di ρ rispetto al tempo, di indicare (quando il suo valore è uguale a zero) una oggettiva proprietà di incompressibilità del fluido nel suo moto.

Per il principio dell'invariabilità delle leggi fisiche nei diversi sistemi di riferimento inerziali, la (5.44) deve però essere equivalente alla (5.43). Se, nella (5.43), sviluppiamo l'operatore $\nabla \cdot \rho \vec{U}$, ottenendo:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{U}) = \rho \nabla \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla \rho$$

e ricordiamo che:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho$$

la (5.43) si trasforma esattamente nella (5.44). In quest'ultima forma, l'equazione di continuità mostra che la variazione temporale della densità *seguendo il moto* è uguale alla divergenza della velocità (con il segno cambiato).

Vale infine, per i fluidi incompressibili ($\frac{d\rho}{dt} = 0$), la relazione:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \vec{U}$$

la cui dimostrazione deriva dal fatto che

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) - \rho \nabla \cdot \vec{U}$$

e ricordando che, per la (5.43):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0$$

5.11 – Equazione di conservazione dell'energia termodinamica.

Consideriamo un elemento di massa che si muove con il fluido (*riferimento Lagrangiano*) e, considerandolo come un sistema termodinamico, applichiamo ad esso la prima legge della termodinamica, all'inizio e alla fine della trasformazione, nel corso della quale scambia calore e lavoro con l'esterno.

Come si è già discusso nel Cap. 4, poiché il sistema in oggetto non è in quiete né all'inizio né alla fine della trasformazione durante la quale scambia *calore* con l'esterno, esso non può essere considerato, in linea di principio, in equilibrio termodinamico, per cui l'applicazione della prima legge può essere fatta solo dopo avere generalizzato il concetto di energia interna (dei sistemi in equilibrio) in quello di energia totale (somma dell'energia interna E , dovuta all'energia cinetica connessa al moto delle singole molecole, e dell'energia cinetica per unità di massa [$1/2 U^2$], dovuta al moto d'insieme dell'elemento, o sistema termodinamico). La prima legge della termodinamica così modificata, che prende anche il nome di equazione dell'energia, stabilisce allora che:

la variazione nell'unità di tempo dell'energia termodinamica totale (interna + cinetica) di un elemento fluido è uguale alla corrispondente variazione della somma del calore fornito al sistema e del lavoro fatto dalle forze esterne sull'elemento stesso nell'unità di tempo.

Un enunciato alternativo di tale legge, esprimibile attraverso la relazione:

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \left(E + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \delta V \right] = \frac{d}{dt} [\delta Q - \delta L],$$

stabilisce che la variazione nell'unità di tempo dell'energia termodinamica totale è uguale alla differenza fra il calore fornito all'elemento fluido e il lavoro da esso compiuto (nell'unità di tempo) contro le forze dell'ambiente esterno.

Le forze “esterne” agenti sull'elemento fluido di volume Lagrangiano dV sono, come già detto, forze di superficie (pressione e attrito) e di volume (gravità e Coriolis). La potenza¹⁵ che esse “sviluppano” (o lavoro nell'unità di tempo, come si preferisce dire in meteorologia) è data dal loro prodotto scalare per la velocità.

1)- *Potenza sviluppata dalle forze di gradiente di **pressione***

Per quanto riguarda la potenza sviluppata dalle forze di gradiente di **pressione**, facendo riferimento al solito cubetto usato negli esempi precedenti [fig. (5.17)], il lavoro L_e compiuto dalle forze di pressione esterne sulla faccia $\delta A = \delta y \delta z$ per uno spostamento δx è $L_{e\delta A} = p_e \delta A \delta x = + p_e \delta y \delta z \cdot \delta x$,
 Similmente, il lavoro L_e compiuto sulla faccia δB è $- p_e \delta B \delta x = - p_e \delta y \delta z \cdot \delta x$.
 Pertanto, la potenza netta sviluppata dalla componente lungo l'asse x della forza di gradiente di pressione sulla coppia di facce parallele al piano

¹⁵ Si considera qui la potenza (e non il lavoro) in quanto il sistema si evolve nel tempo, non essendo all'equilibrio

coordinato $x=\text{cost}$ è data dalla differenza fra la potenza sviluppata sulla faccia δA e quella sviluppata sulla faccia δB , ossia la differenza fra:

$$\frac{d L_{e_{\delta A}}}{d t} = p_e \delta y \delta z \frac{\delta x}{d t} = p_e u_{\delta A} \delta y \delta z$$

e:

$$\frac{d L_{e_{\delta B}}}{d t} = - p_e u_{\delta B} \delta y \delta z$$

per cui:

$$\delta P_{p(x)} = (pu)_{\delta A} \delta y \delta z - (pu)_{\delta B} \delta y \delta z$$

dove il segno $-$ indica che sulla faccia B si sviluppa una potenza “positiva” se u è negativa.

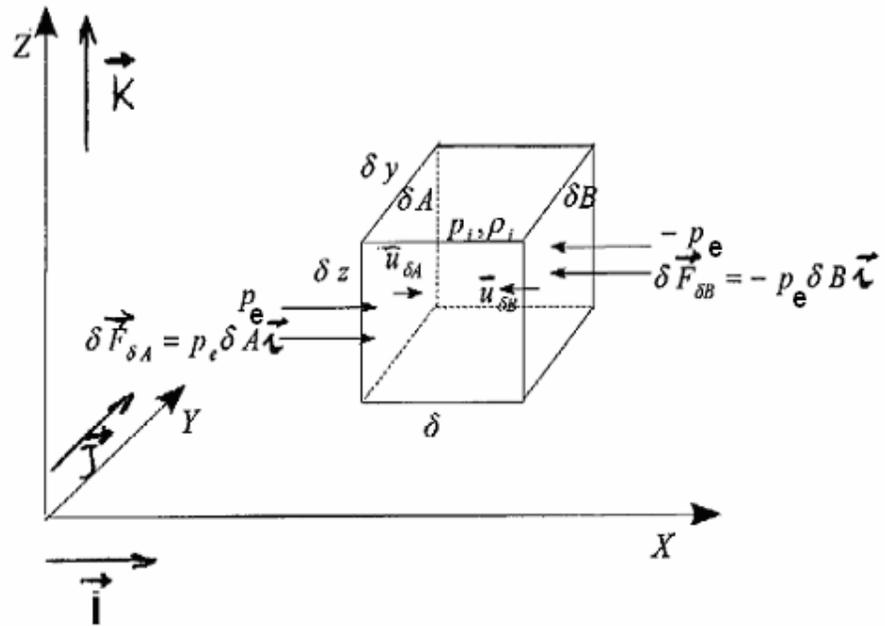


Fig. (5.17)

Nella fig.(5.17) le potenze per unità di superficie $-(pu)_{dB}$ e $(pu)_{dA}$ applicate alle due superfici dA e dB non compaiono per semplicità.

Sviluppando in serie di Taylor la potenza $(pu)_{dB}$ relativa alla superficie dB in funzione della potenza $(pu)_{dA}$ relativa alla superficie dA , si ottiene:

$$(pu)_{dB} = (pu)_{dA} + \left[\frac{\partial}{\partial x} (pu) \right]_{dA} \delta x + \dots \quad [\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}] \text{ o}$$

$[\text{kgs}^{-3}]$

da cui:

$$[(pu)_{dA} - (pu)_{dB}] \delta y \delta z = \delta P_{p(x)} = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (pu) \right]_{dA} \delta x \delta y \delta z = - \left[\frac{\partial}{\partial x} (pu) \right]_{dA} \delta V$$

Includendo le altre due coppie di facce (perpendicolari agli assi y e z), si ha infine:

$$\delta P_p = - \nabla \cdot (p\vec{U}) \delta V$$

2)- *Potenza sviluppata dalle altre forze applicate*

La potenza sviluppata dalle forze di **gravità** è semplicemente $\rho \vec{g} \cdot \vec{U} \delta V = -\rho g w \delta V$ mentre quella dovuta alla forza di Coriolis è, per definizione, nulla (la forza deviante è perpendicolare alla velocità e quindi non esegue lavoro).

Se $E = C_v T$ e $\frac{1}{2} U^2 = \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U}$ sono rispettivamente l'energia interna e l'energia cinetica d'insieme della massa fluida unitaria, per cui l'energia termodinamica totale può rappresentarsi come $E_{tot} = E + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U}$, il principio di conservazione dell'energia nell'unità di tempo per il volume (**Lagrangiano**) dV si scriverà:

$$\frac{d}{dt} \left[\rho \left(E + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \delta V \right] = -\nabla \cdot (p \vec{U}) \delta V - \rho g \vec{k} \cdot \vec{U} \delta V + \rho \dot{q} \delta V$$

dove con q sono state indicate tutte le sorgenti (o pozzi) di energia termica di natura radiante, latente, sensibile e con \dot{q} la loro variazione nel tempo.

Sviluppando le derivate, si ha:

$$\rho \delta V \frac{d}{dt} \left(E + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) + \left(E + \frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) \frac{d(\rho \delta V)}{dt} = -\vec{U} \cdot \nabla p \delta V - p \nabla \cdot \vec{U} \delta V - g \rho w \delta V + \rho \dot{q} \delta V \quad (5.45)$$

Da questa relazione si evince anche il significato fisico del termine che esprime il lavoro compiuto nell'unità di tempo dalle forze di ∇p , termine che si compone di un contributo meccanico dovuto al moto di insieme del volume δV , e di un contributo termodinamico dovuto alla dilatazione Lagrangiana del volume δV .

Ricordando che dV è un volume di riferimento Lagrangiano nel quale, per definizione:

$$\frac{d(\delta M)}{dt} = \frac{d(\rho \delta V)}{dt} = 0$$

possiamo eliminare il secondo termine a primo membro della (5.45). Inoltre, dividendo la (5.45) per δV , moltiplicando scalarmente per \vec{U} la (5.43), trascurando l'attrito e moltiplicando per ρ , si ottiene:

$$\vec{U} \cdot \frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{U} \cdot (-2\Omega \times \vec{U}) + \vec{U} \cdot \vec{g} - \vec{U} \cdot \frac{\nabla p}{\rho}$$

da cui:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} \right) = -\vec{U} \cdot \nabla p - \rho g w \quad (5.46)$$

detta anche “*equazione di conservazione dell’energia meccanica nell’unità di tempo*”.

Grazie alla (5.36), la (5.35) può allora essere semplificata e scritta nella forma finale:

$$\rho \frac{dE}{dt} = -p \nabla \cdot \vec{U} + \rho \dot{q} \quad (5.47)$$

detta anche “*equazione di conservazione dell’energia termica o interna nell’unità di tempo*”.

La semplificazione ottenuta grazie alla (5.46) è consistita, fisicamente, nel separare i termini meccanici [il cui bilancio è per l’appunto espresso dalla (5.46)] dalla (5.47), lasciando a quest’ultima i soli termini del bilancio dell’energia termica.

Si vede così che la (5.45) contiene in modo “disaccoppiato” e, quindi separabile, l’equazione (5.46) che esprime la conservazione dell’energia meccanica e la (5.47) che esprime la conservazione dell’energia termica, ossia l’equazione del I principio della Termodinamica.

La (5.46) che, come abbiamo detto, esprime il *bilancio dell’energia meccanica*, è meglio nota, ed usata, nella forma in cui compare il *geopotenziale V*.

Ricordando che:

$$g w = g \frac{dz}{dt} = \frac{dV}{dt} \quad (5.48)$$

otteniamo:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \vec{U} \cdot \vec{U} + V \right) = -\vec{U} \cdot \nabla p \quad (5.49)$$

La (5.49) mostra che la variazione nell'unità di tempo, seguendo il moto del fluido, della somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale (detta anche *energia meccanica*) è uguale al lavoro fatto nell'unità di tempo dalle forze di gradiente di pressione.

L'equazione di continuità Lagrangiana $\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{U} = 0$ (5.44) permette di modificare anche l'espressione dell'equazione di bilancio termico (5.47). Infatti:

$$\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \vec{U} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}$$

essendo $\alpha = \frac{1}{\rho}$ il volume specifico. Inoltre, essendo per l'aria secca $E = C_v T$ ($C_v = 716 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$), si ottiene per la (5.47) la nuova forma:

$$C_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d\alpha}{dt} = \dot{q} \quad (5.50)$$

ossia l'equazione familiare della termodinamica (I principio) riferita all'unità di tempo.

Con l'equazione di stato e la relazione di Mayer, la (5.50) si trasforma ancora nella:

$$C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{q} \quad (5.51)$$

con $C_p = 1003 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Dividendo ambo i membri della (5.51) per T e usando ancora l'equazione di stato, si giunge all'equazione [ottenuta derivando logicamente l'equazione defintoria della temperatura potenziale, o equazione di Poisson,

$$\mathcal{G} = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R_d / C_p}]:$$

$$C_p \frac{d \log T}{dt} - R_d \frac{d \log p}{dt} = C_p \frac{d \log \mathcal{G}}{dt} = \frac{\dot{q}}{T} \Rightarrow \frac{ds}{dt} \quad (5.52)$$

Si capisce in tal modo che, con l'operazione di derivazione logica dell'equazione defintoria della temperatura potenziale $\mathcal{G} = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R_d / C_p}$, si è ottenuta, dalla (5.51), la variazione nel tempo dell'entropia nell'unità di massa seguendo il moto del fluido.

La (5.52) ci mostra anche che, se il movimento d'insieme dell'elemento fluido è tale per cui $s = \text{cost}$ (traiettoria isentropica), la temperatura potenziale si conserva [vedi anche § 4.3].

Sempre la (5.52) rappresenta una generalizzazione dell'equazione (4.11) del Capitolo 4 della termodinamica, ottenuta derivando logicamente

l'equazione defintoria della temperatura potenziale $\mathcal{G} = T \left(\frac{1000}{p} \right)^{R_d / C_p}$, la quale

stabiliva già una proprietà di conservazione di \mathcal{G} nei processi adiabatici.

5.12 – Analisi di scala delle equazioni di conservazione della quantità di moto, massa ed energia termodinamica.

5.12.1 – Analisi di scala delle equazioni del moto

Le equazioni complete del moto, ossia l'equazione vettoriale (5.23), o le equazioni scalari (5.32), (5.33) e (5.34), descrivono tutti i tipi e scale dei moti atmosferici, fra cui ad esempio anche le onde sonore che, pur essendo una loro legittima soluzione, hanno però scarso interesse nella fisica dell'atmosfera a mesoscala e a scala sinottica (tralasciando i disturbi che esse, se non filtrate, provocherebbero nelle simulazioni numeriche).

L'analisi di scala delle equazioni del moto, evidenziando il *peso* dei vari termini che le compongono in relazione a ciascun tipo di problema meteorologico che si considera, permette di eliminare quelli di minor rilievo, semplificando il trattamento matematico e, soprattutto, trascurando in questo modo tipi di moto non desiderati quali, per l'appunto, alcuni fra i moti oscillatori sopra ricordati che, oltre a essere inutili, possono *inquinare* le altre soluzioni di interesse, facendo crescere in esse errori di tipo cosiddetto *computazionale*.

L'analisi di scala, in questo ultimo contesto, rappresenta anche un metodo di “*filtraggio*”. Per un sistema sinottico alle medie latitudini ($\theta = 45^\circ$) le scale delle grandezze fisiche di riferimento con cui si scalano tutte le altre grandezze sono le seguenti:

$$\begin{array}{ll} U \sim 10 \text{ m s}^{-1} & \text{velocità di scala orizzontale} \\ W \sim 1 \text{ cm s}^{-1} = 10^{-2} \text{ ms}^{-1} & \text{velocità di scala verticale} \\ L \sim 10^6 \text{ m} & \text{lunghezza di scala orizzontale} \end{array}$$

$D \sim 10^4 m$	spessore (o altezza) di scala verticale
$\frac{\Delta_H P}{\rho} \sim 10^3 m^2 s^{-2}$	fluttuazione orizzontale di scala della pressione normalizzata alla densità (per renderla indipendente dalla quota)
$\frac{L}{U} \sim 10^5 s$	tempo di scala (avvettivo, o di trasporto)
$f_o = 2O \sin 45^\circ \sim 10^{-4} s^{-1}$	tempo ⁻¹ , o periodo, di scala (di rotazione terrestre) o parametro di Coriolis

La scala di $\frac{\Delta_H P}{\rho}$ è stata determinata al livello del mare, ove $\rho \cong 1 \frac{kg}{m^3}$, sulla base della differenza tipica (sempre a quel livello) dei valori della pressione $\Delta_H P$ fra due punti, la cui distanza di scala sia $L = 10^6 m$. Tale $\Delta_H P$ vale infatti $10^3 Pa$, ossia $10 mb$.

Ricordando l'equazione (3.7) della Statica, la fluttuazione $\frac{\Delta_H P}{\rho}$ (il termine di normalizzazione $1/\rho$ è stato introdotto, come detto sopra, per rendere la scala indipendente dalla comune variazione esponenziale, con l'altezza, di p e di ρ) su una superficie di altezza costante corrisponde alla fluttuazione del geopotenziale F su una superficie isobarica.

Si ha allora la seguente tabella (5.1) nella quale sono riportati gli ordini di grandezza dei vari termini delle prime due componenti (orizzontali) dell'equazione del moto, avendo ancora una volta trascurato i termini d'attrito che, al di sopra di $1-2 km$, sono di scarso rilievo.

Tabella [5.1] - Analisi di scala delle componenti orizzontali dell'equazione del moto

Componente x della equazione del moto	$\frac{du}{dt}$	$-2\Omega v \sin \vartheta$	$+2\Omega w \cos \vartheta$	$+\frac{uw}{a}$	$-\frac{uv \operatorname{tg} \vartheta}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$
Componente y della equazione del moto	$\frac{dv}{dt}$	$+2\Omega u \sin \vartheta$		$+\frac{vw}{a}$	$+\frac{u^2 \operatorname{tg} \vartheta}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$
Scale caratteristiche di ciascun termine	$\frac{U^2}{L}$	$f_o U$	$f_o W$	$\frac{UW}{a}$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{\Delta_H P}{\rho L}$
Ordine di grandezza ($m s^{-2}$)	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-8}	10^{-5}	10^{-3}

Dagli ordini di grandezza della tabella [5.1] si evince come l'approssimazione geostrofica sia giustificata per i moti sinottici a media latitudine (aventi $R_o \sim 10^{-1}$), in quanto il termine di variazione della velocità “scala” come $\frac{U^2}{L} = 10^{-4} m s^{-2}$, che è un ordine di grandezza inferiore a quello dei due termini che definiscono l'equilibrio geostrofico $\left(f_o U \text{ e } \frac{\Delta_H P}{\rho L} \right)$. Il significato di ciò è che l'equilibrio geostrofico rappresenta una sorta di “*attrattore*” e gli scostamenti da questo equilibrio, prodotti da fluttuazioni di pressione e/o di densità, “*generano*” accelerazioni di “*riaggiustamento geostrofico*”, di un ordine di grandezza più piccoli, i quali guidano l'atmosfera verso un altro stato geostrofico.

In questa analisi di scala, non sono stati presi in considerazione i termini di attrito, per via dei loro valori di scala trascurabili. Infatti, nei moti in atmosfera “libera” su scala sinottica, i termini di attrito sono essenzialmente di tipo molecolare e contribuiscono con valori di scala $\frac{\nu_{mol}U}{H^2}$ dell’ordine di $10^{-12} m s^{-2}$ [$\nu_{mol} = 10^{-5} m^2 s^{-1}$] nei moti orizzontali e con valori di scala $\frac{\nu_{mol}W}{H^2} = 10^{-15} m s^{-2}$ (sempre corrispondente a $\nu_{mol} = 10^{-5} m^2 s^{-1}$) nei moti verticali. Gli attriti turbolenti, pur essendo di molti ordini di grandezza più elevati, non vengono considerati in questa analisi di scala perché relativi a moti su scale spaziali inferiori confinate nello Strato Limite Planetario dell’atmosfera, la cui altezza è inferiore ai 1500 m.

Per la terza componente (verticale) dell’equazione del moto, l’analisi di scala può essere rappresentata dalla già ricordata tabella [5.2], nella quale il gradiente verticale di pressione è scalato con p_o/H , tenuto conto che la pressione decresce di un ordine di grandezza dal suolo (ove vale p_o) alla tropopausa (all’altezza H dal suolo). Come già ricordato al paragrafo [5.9], questa analisi evidenzia soprattutto come sia giustificata l’approssimazione idrostatica quando non si tenga conto dei moti orizzontali dell’aria, ossia quando si consideri solo lo stato base dell’atmosfera.

Tabella [5.2] - Analisi di scala della componente verticale dell’equazione del moto.

Componente della equazione del moto	z	$\frac{dw}{dt}$	$-2\Omega u \cos\theta$	$-\frac{u^2 + v^2}{a}$	$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$	$-g$
Scala caratteristica di ciascun termine		$\frac{UW}{L}$	$f_o u$	$\frac{U^2}{a}$	$\frac{p_o}{\rho H}$	g
Ordini di grandezza ($m s^{-2}$)		10^{-7}	10^{-3}	10^{-5}	10	10

5.12.2 – Analisi di scala dell' equazione di continuità.

Per semplificare questa analisi, scomponiamo [come abbiamo fatto prima (§ 5.9) nello studio dell'approssimazione idrostatica] la densità $\rho(z)$ in un termine $\rho_o(z)$, che ne rappresenta la media orizzontale alla quota z , costante quindi rispetto a x , y e t , e in un termine $\rho'(x,y,z,t)$ che ne rappresenta la fluttuazione locale rispetto al suo stato “base” $\rho_o(z)$ definito dalla condizione di equilibrio idrostatico, ossia:

$$\rho(x,y,z,t) = \rho_o(z) + \rho'(x,y,z,t)$$

L'equazione di continuità Lagrangiana (5.44) diviene allora, nella approssimazione con cui si era ottenuta la (5.42):

$$0 = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{U} \cong \frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho' \right) + \frac{w}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial z} + \nabla \cdot \vec{U}$$

Poiché $\rho'/\rho_o \sim 10^{-2}$, abbiamo:

$$\frac{1}{\rho_o} \left(\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \rho' \right) \approx \frac{\rho'}{\rho_o} \frac{U}{L} \cong 10^{-7} s^{-1} \quad (5.53)$$

Inoltre, se l'altezza di scala H della densità [equazione (3.7) della Statica] coincide con l'altezza di scala D , si può scrivere che⁽¹⁶⁾

⁽¹⁶⁾ Infatti, dall'equazione idrostatica $\frac{dp}{dz} = \frac{d(\rho R_d T)}{dz} = -\rho g$ si ha, assumendo

$$\frac{dT}{dz} = 0 \text{ (per cui } T = \bar{T}\text{):}$$

$$\frac{d\rho}{\rho dz} = -\frac{g}{R_d \bar{T}} = H^{-1} \text{ e, quindi: } \frac{d \log \rho}{dz} \cong H^{-1} \cong D^{-1}$$

$$\frac{w}{\rho_o} \frac{\partial \rho_o}{\partial z} = w \frac{\partial \log \rho_o}{\partial z} \cong \frac{w}{D} \cong 10^{-6} s^{-1} \quad (5.54)$$

Infine, poiché $\frac{\partial u}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ nei moti a scala sinottica tendono ad essere di ugual

ordine di grandezza $\left(\frac{U}{L} \cong 10^{-5} s^{-1}\right)$ ma di segno opposto, la loro somma viene

posta - con sufficiente credibilità - uguale a $10^{-1} \frac{U}{L}$, per cui:

$$\nabla \cdot \vec{U} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \cong 10^{-1} \frac{U}{L} + \frac{W}{D} \cong 10^{-6} s^{-1} \quad (5.55)$$

Il termine (5.53) risulta quindi trascurabile rispetto ai termini (5.54) e (5.55), cosicché l'equazione di continuità sulla scala sinottica può venire semplificata, in prima approssimazione, nella espressione seguente:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + w \frac{\partial \log \rho_o}{\partial z} = \frac{1}{\rho_o} \nabla \cdot (\rho_o \vec{U}) = 0$$

ossia: $\nabla \cdot (\rho_o \vec{U}) = 0 \quad (5.56)$

essendo:

$$\nabla \cdot (\rho_o \vec{U}) = \nabla \rho_o \cdot \vec{U} + \rho_o (\nabla \cdot \vec{U}) = \frac{\partial \rho_o}{\partial z} w + \rho_o \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$$

La (5.46) esprime una condizione di incompressibilità Euleriana, o *locale*, del fluido, per cui il flusso di massa, calcolato usando la densità $\rho_o(z)$ dello stato base mediata sul piano orizzontale, risulta non divergente.

Questa condizione di incompressibilità locale non va confusa con la vera incompressibilità, quella Lagrangiana o *sostanziale*, data dalla condizione $d\rho/dt = 0$ la quale, per la (5.44), dà:

$$(\nabla \cdot \vec{U}) = 0 \quad (5.57)$$

Comunque, se non intervengono moti verticali significativi (ossia se $w \sim 0$, e questo si può supporre con una certa confidenza nei moti a scala sinottica), la (5.56) ci dice che nei moti orizzontali vale approssimativamente una condizione di incompressibilità. Se, invece, la componente w del moto è diversa da *zero*, occorre tenere conto della variazione di ρ_0 con l'altezza z . Si vede quindi che il fluido, sulla scala sinottica, avendo moti essenzialmente orizzontali [$W \equiv O(10^{-3}U)$], si comporta con ottima approssimazione come un fluido incompressibile.

5.12.3 - Analisi di scala dell'equazione dell'energia termodinamica.

Ricordiamo nuovamente, per comodità la definizione di temperatura potenziale (equazione di Poisson):

$$\vartheta = T \left(\frac{p_s}{p} \right)^{\frac{R_d}{C_p}} \quad (5.58)$$

e la sua derivata logaritmica rispetto al tempo:

$$C_p \frac{d \log \vartheta}{dt} = C_p \frac{d \log T}{dt} - R_d \frac{d \log p}{dt} \quad (5.59)$$

ossia:

$$\frac{C_p}{\mathcal{G}} \frac{d\mathcal{G}}{dt} = \frac{C_p}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R_d}{p} \frac{dp}{dt} \quad (5.59a)$$

La (5.59), per confronto con l'equazione (5.52), che qui riportiamo per comodità:

$$C_p \frac{d \log T}{dt} - R_d \frac{d \log p}{dt} = C_p \frac{d \log \mathcal{G}}{dt} = \frac{\dot{q}}{T} \Rightarrow \frac{ds}{dt} \quad (5.52)$$

dà:

$$C_p \frac{d \log \mathcal{G}}{dt} = \frac{ds}{dt} \quad (5.60)$$

mostrando nuovamente che, per processi adiabatici reversibili in aria *secca*, le variazioni di temperatura potenziale sono proporzionali alle variazioni di entropia. Se una particella conserva la propria entropia lungo la sua traiettoria, ritroviamo il risultato già visto, ossia che la superficie isentropica che contiene questa traiettoria è anche una superficie a temperatura potenziale costante, e viceversa.

A questo punto, come s'è fatto prima per la densità, separiamo \mathcal{G} in uno *stato base* $\mathcal{G}_o(z)$ a cui si sovrappone lo *stato perturbato* $\mathcal{G}'(x, y, z, t)$.

La (5.60) diviene allora:

$$\frac{1}{\mathcal{G}_o} \left(\frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \mathcal{G}' \right) + w \frac{\partial \log \mathcal{G}_o}{\partial z} = \frac{\dot{q}}{C_p T} \quad (5.61)$$

essendo $\left| \frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o} \right| \ll 1$ ¹⁷, il che ha permesso di porre:

¹⁷ Infatti $\frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o} \cong \frac{4K}{300K} \cong 10^{-2}$ e:

$$\log \left(\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_o} \right) = \log \left(\frac{\mathcal{G}_o + \mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o} \right) = \log \left(1 + \frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o} \right) \cong \frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o} \right)^2 + \dots \cong \frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o}$$

$$\log \mathcal{G} \cong \log \mathcal{G}_o + \frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o} \quad (5.62)$$

La (5.62) è ovviamente valida a meno di infinitesimi di ordine superiore della quantità $\frac{\mathcal{G}'}{\mathcal{G}_o}$.

Il rateo di riscaldamento \dot{q} dell'atmosfera, detto anche riscaldamento **diabatico**, è di norma prodotto dal riscaldamento radiante netto, le altre sorgenti (quali flussi di calore latente) essendo importanti solo nei processi di formazione dei principali sistemi di precipitazioni.

Nella troposfera il riscaldamento radiante è in grado di determinare un **trend diabatico** nella temperatura $\left| \frac{\dot{q}}{C_p} \right|$ che è, al massimo, dell'ordine di $= 1 \text{ } ^\circ\text{C giorno}^{-1}$, mentre le fluttuazioni orizzontali \mathcal{G}' che si osservano in sistemi sinottici alle medie latitudini, come si è appena ricordato, sono dell'ordine dei $4 \text{ } ^\circ\text{C}$.

Quindi, i due processi che possono indurre variazioni \mathcal{G}' nella temperatura potenziale dell'aria sono l'avvezione termica orizzontale e la convezione termica verticale. Entrambi i processi sono in grado di produrre variazioni \mathcal{G}' dell'ordine di $4 \text{ } ^\circ\text{C giorno}^{-1}$, come mostrato dall'analisi di scala qui sotto riportata:

$$\left(\frac{\dot{q}}{C_p} \right)_{a.o.} = \frac{T}{\mathcal{G}_o} \left(\frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \mathcal{G}' \right) \cong \frac{\mathcal{G}' U}{L} \approx +4 \text{ } ^\circ\text{C giorno}^{-1} \quad (5.63)$$

$$\left(\frac{-\dot{q}}{C_p} \right)_{c.v.} = w \left(\frac{T}{\mathcal{G}_o} \frac{\partial \mathcal{G}_o}{\partial z} \right) = w(\gamma_a - \gamma) \cong -4 \text{ } ^\circ\text{C giorno}^{-1} \quad (5.64)$$

da cui consegue che la (5.61) divenga:

$$\left[\frac{\partial \mathcal{G}'}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \mathcal{G}' \right] + w \frac{\partial \mathcal{G}_o}{\partial z} \cong 0 \quad (5.64a)$$

essendo:

$$\begin{aligned} \gamma_a - \gamma &\sim 4 \text{ } ^\circ\text{C km}^{-1} \text{ (stratificazione stabile)} & (5.65) \\ a.o. &\rightarrow \text{avvettivo orizzontale} \\ c.v. &\rightarrow \text{convettivo verticale} \\ \frac{T}{\mathcal{G}_o} &\cong 1 \end{aligned}$$

La (5.64a) aiuta a comprendere perché il processo avvettivo orizzontale (positivo) è associato al processo convettivo verticale (negativo) e viceversa: solo così, infatti, i due processi si compensano in modo da produrre un effetto complessivo molto piccolo, dell'ordine di grandezza di quello osservato in natura.

Pertanto, in prima approssimazione, in assenza di forti riscaldamenti “*diabatici*”, la variazione temporale⁽¹⁸⁾ della fluttuazione di temperatura potenziale \mathcal{G}' è, sulla scala sinottica, uguale (e di segno opposto) al raffreddamento o riscaldamento adiabatico associato al moto verticale nello *stato base* staticamente stabile \mathcal{G}_o .

La (5.64a) può pertanto essere rappresentata dalla relazione:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{G}'}{dt} + w \frac{\partial \mathcal{G}_o}{\partial z} &= \frac{d\mathcal{G}}{dt} + w \frac{\partial \mathcal{G}_o}{\partial z} = \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x} + v \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \right] + w \frac{\partial \mathcal{G}_o}{\partial z} = \left(\frac{d\mathcal{G}}{dt} \right)_{a.o.} + \left(w \frac{\partial \mathcal{G}_o}{\partial z} \right)_{c.v.} = \\ &= \left(\frac{d\mathcal{G}_o}{dt} \right)_{a.o.} + \left(\frac{d\mathcal{G}'}{dt} \right)_{a.o.} + w \frac{\partial \mathcal{G}_o}{\partial z} = \frac{d\mathcal{G}'}{dt} + w \frac{\partial \mathcal{G}_o}{\partial z} \cong 0 \end{aligned} \quad (5.66)$$

⁽¹⁸⁾ Sostanziale, o Lagrangiana

essendo: $\frac{d\mathcal{G}_o}{dt} = 0$, poiché \mathcal{G}_o è solo funzione di z .

5.13 – Equazioni della dinamica in coordinate isobariche (x, y, p).

Nel sistema di riferimento $O(x, y, p)$ che usa la pressione come coordinata verticale, le equazioni fondamentali viste precedentemente assumono forme che le rendono di più semplice applicazione nei problemi atmosferici.

Consideriamo, ad esempio, l'equazione prognostica approssimata del moto orizzontale ($\vec{V} = \vec{i}u + \vec{j}v$):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + f\vec{k} \times \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla_H P \quad (5.67)$$

con ∇_H operatore di gradiente orizzontale, ossia applicato mantenendo $z = \text{cost.}$

Si vede immediatamente che l'equazione di equilibrio geostrofico in coordinate isobariche:

$$f\vec{V}_g = \vec{k} \times \nabla_p \phi \quad (5.68)$$

ottenuta applicando le relazioni (3.34) e seguenti del Capitolo della Statica che trasformano i gradienti di pressione delle coordinate geometriche nei corrispondenti gradienti di geopotenziale delle coordinate di pressione¹⁹, presenta il vantaggio, rispetto a quella in coordinate geometriche (5.67), di non far comparire la densità, rendendo così l'applicazione della legge

¹⁹ $-\frac{1}{\rho} \nabla_H P = -\nabla_p \phi$ (vedere Cap. 3 – Statica dell'atmosfera)

geostrofica esplicitamente indipendente dall'altezza. E' utile anticipare che la (5.58) mostra anche che, quando le superfici isobariche sono parallele (ossia, come vedremo più avanti, l'atmosfera è barotropica), il vento geostrofico non varia con la quota. Infatti, vale in questi casi la relazione:

$$\left[\frac{p_o - (p_o - \delta p)}{\delta x} \right]_z = \left[\frac{p_o - (p_o - \delta p)}{\delta z} \right]_x \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)_p$$

Al limite per $\delta z \rightarrow 0$ si avrà:

$$\left[\frac{p_o - (p_o - \delta p)}{\delta z} \right]_x \rightarrow \left(-\frac{\partial p}{\partial z} \right)_x$$

essendo $\delta z < 0$ per $\delta p > 0$.

Applicando ora l'equazione dell'idrostatica e passando ai limiti $\delta x \rightarrow 0$ e $\delta z \rightarrow 0$, si ha, per due diverse quote qualsiasi z_o e z_I :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)_p = g \left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)_p = \begin{cases} g \left(\frac{\delta z_I}{\delta x_I} \right)_{p_I} \\ g \left(\frac{\delta z_o}{\delta x_o} \right)_{p_o} \end{cases} \quad (5.69)$$

Nella (5.69) il primo membro deve essere racchiuso fra parentesi quadre

$\left[-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right]_z$ che, per la sopra menzionata condizione di parallelismo delle isobare in coordinate geometriche e delle isogeopotenziali in coordinate isobariche (ma con l'assenza della densità in queste ultime) è uguale a tutte le quote.

La figura (5.17a) mostra che anche in coordinate geometriche il parallelismo delle isobare assicura la costanza con la quota del vento geostrofico nonostante la diminuzione del gradiente orizzontale di pressione che è però

compensata da una corrispondente diminuzione della densità dell'aria che compare a denominatore dell'equazione del vento geostrofico in queste coordinate. Le coordinate isobariche hanno invece il vantaggio di non far comparire la densità ed in esse i gradienti verticali di geopotenziale sono uguali a tutte le quote, essendo (in queste coordinate) le superfici isogeopotenziali non solo tutte parallele ma anche equispaziate.

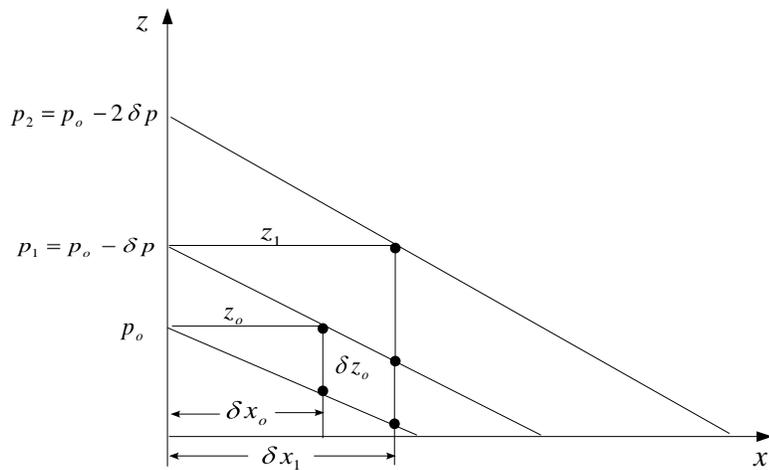


Fig. (5.17a)

La relazione che lega i due sistemi di coordinate può essere così riassunta:

<u>Coordinate geometriche</u>	<u>Coordinate isobariche</u>
A un dato gradiente orizzontale di <i>pressione</i> , corrisponde un vento geostrofico la cui intensità è <i>inversamente proporzionale</i> alla densità dell'aria (ossia direttamente proporzionale alla quota.)	A un dato gradiente isobarico di <i>geopotenziale</i> . corrisponde un vento geostrofico la cui intensità è <i>univocamente</i> determinata, indipendentemente dalla densità.

Inoltre, nei moti per i quali f può essere considerata costante e il vento si avvicina a una condizione di geostrofia (ossia con deboli accelerazioni scalari e vettoriali), si ha²⁰:

$$\nabla_p \cdot \vec{V}_g = 0 \quad (5.70)$$

Il significato della (5.60) è che il vento geostrofico, sulle superfici a pressione costante, è un vettore a divergenza orizzontale nulla, ossia è un vettore solenoidale, privo di sorgenti e di pozzi.

Questo risultato è stato ottenuto, nel sistema delle coordinate isobariche, senza dovere imporre la condizione $\rho = \text{cost}$ ma solo quella di $f = \text{cost}$.

Passando ora all'equazione di continuità, osserviamo innanzitutto che l'operazione di derivazione totale, o sostanziale, diviene, nel sistema (x, y, p) :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dp}{dt} \frac{\partial}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad (5.71)$$

dove $\omega \equiv \frac{dp}{dt}$ (anziché $w \equiv \frac{dz}{dt}$), prende il nome di *moto verticale omega* e rappresenta la variazione sostanziale della pressione seguendo il moto dell'elemento fluido.

Ciò premesso, diamo, senza dimostrarla, l'espressione in coordinate isobariche dell'equazione (5.34), ossia l'equazione di continuità Lagrangiana

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot \vec{U} = 0. \text{ Essa è:}$$

²⁰ Ricavando \vec{V}_g dalla (5.58), si ha: $\vec{V}_g = \frac{\vec{k}}{f} \times \nabla_p \phi$. Se $f = \text{cost}$, si ha che:

$$\nabla_p \cdot \vec{V}_g = \frac{1}{f} \nabla_p \cdot (\vec{k} \times \nabla_p \phi) = \frac{1}{f} \left[\nabla_p \phi \cdot (\nabla \times \vec{k}) - \vec{k} \cdot (\nabla \times \nabla_p \phi) \right] = 0 \text{ avendo applicato l'identità vettoriale } \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B} \text{ ed essendo } \nabla \times \vec{k} \text{ e } \nabla \times \nabla_p \phi = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (5.72)$$

La semplicità della (5.72) rispetto alla (5.44) è enorme, in quanto non compaiono più né la densità, né le derivate rispetto al tempo (ricordiamo però che ω è pur sempre una variazione temporale – sostanziale o Lagrangiana – della pressione).

Per quanto riguarda invece l'equazione dell'energia, la trasformazione a coordinate isobariche peggiora la situazione.

Infatti, trasformando la (5.41) $\left\{ C_p \frac{dT}{dt} - \alpha \frac{dp}{dt} = \dot{q} \right\}$ mediante la (5.71), si ha:

$$C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right) - \frac{1}{\rho} \omega = \dot{q} \quad (5.73)$$

Ponendo, con l'aiuto dell'equazione di stato $\left(\frac{1}{\rho} = \alpha = \frac{R_d T}{p} \right)$ e dell'equazione di Poisson (5.58) ⁽²¹⁾:

$$S_p = \frac{R_d T}{C_p p} - \frac{\partial T}{\partial p} = - \frac{T}{\vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial p} \quad (5.74)$$

la (5.73) diviene:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) - S_p \omega = \frac{\dot{q}}{C_p} \quad (5.75)$$

⁽²¹⁾ derivata logaritmicamente rispetto alla pressione.

Soffermandoci sull'espressione e sul significato di S_p , riconosciamo subito nel secondo membro della (5.64) l'equivalente, in coordinate isobariche, della frequenza di Brunt-Vaisala $\{N^2 = g(d\log\theta_0/dz)\}$ in coordinate geometriche. Pertanto, S_p rappresenta il parametro di stabilità statica in coordinate isobariche.

Possiamo anche esprimere S_p in funzione di $(\gamma_a - \gamma_e)$. Infatti, ricordando che $\frac{T}{g} \frac{\partial g}{\partial z} = (\gamma_a - \gamma_e)$, e trasformando la (5.64) con l'aiuto dell'equazione idrostatica, (cioè ponendo $dp = -\rho g dz$) otteniamo:

$$S_p = - \frac{T}{g} \frac{\partial g}{\partial p} = \frac{\gamma_a - \gamma_e}{\rho g} \quad (5.76)$$

Vediamo che S_p è > 0 se $\gamma_e < \gamma_a$; poiché ρ decresce esponenzialmente con l'altezza, S_p aumenta molto rapidamente con z . Questo è uno svantaggio per la definizione del parametro di stabilità in coordinate isobariche.

Infine, la (5.75) consente di valutare la velocità verticale nei moti sinottici che, essendo dell'ordine del $cm s^{-1}$, non si riesce generalmente a misurare con normali metodi sperimentali. Supposto che il riscaldamento **diabatico** \dot{q} possa essere trascurato rispetto agli altri termini del bilancio termico, la (5.75) diviene:

$$\omega = S_p^{-1} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

Determinando l'avvezione di temperatura con l'analisi del vento termico (vedi più avanti, al § 5.15) e misurando la variazione locale di temperatura, è possibile desumere $\omega = \frac{dp}{dt}$ e, di qui, $w = \frac{dz}{dt}$.

Si può già comunque anticipare una semplice relazione che lega ω a w .

Partiamo dalla definizione di ω , ossia $\omega \equiv \frac{d p}{d t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z}$.

Scomponiamo il vento \vec{U} nella componente geostrofica \vec{V}_g e nella differenza \vec{U}' fra \vec{U} e \vec{V}_g , con $|\vec{U}'| \ll |\vec{V}_g|$. Scriviamo quindi la precedente relazione nella forma:

$$\omega \equiv \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U}' \cdot \nabla p + w \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{U}' \cdot \nabla p - \rho g w.$$

Da questa relazione \vec{V}_g scompare perché, essendo $\vec{V}_g = \frac{1}{\rho f} \vec{k} \times \nabla p$, si ha

$\vec{V}_g \cdot \nabla p = 0$. Una rapida analisi di scala evidenzia che, per un moto sinottico,

$$\frac{\partial p}{\partial t} \cong 1 \text{ kPa giorno}^{-1}, \vec{U}' \cdot \nabla p \cong (1 \text{ m s}^{-1}) (10^1 \text{ Pa km}^{-1}) \cong 0.1 \text{ kPa giorno}^{-1} \text{ mentre:}$$

$$\rho g w = 1 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ Pa s}^{-1} = 10^{-1} \text{ Pa s}^{-1} = 10 \text{ kPa giorno}^{-1}.$$

Trattenendo il termine più importante, si ha, con buona approssimazione:

$$\omega = -\rho g w.$$

5.14 – Coordinate naturali o di traiettoria (s, n, z).

Con riferimento alle figure (5.18a) e (5.18b), le coordinate naturali sono definite dai versori $\vec{\tau}, \vec{n}$ e \vec{k} orientati rispettivamente in ciascun punto della traiettoria secondo le direzioni tangenziali, normale⁽²²⁾ e verticale.

⁽²²⁾ con verso positivo a sinistra del vettore velocità

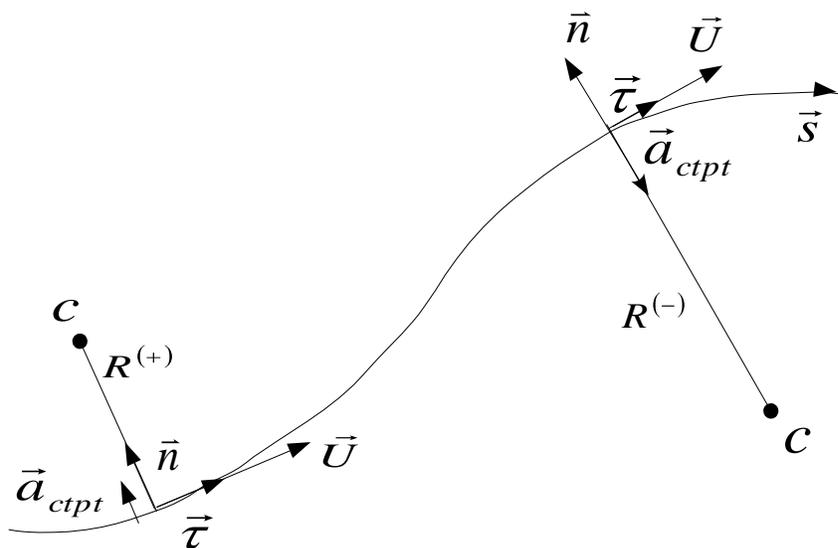


Fig. (5.18a)

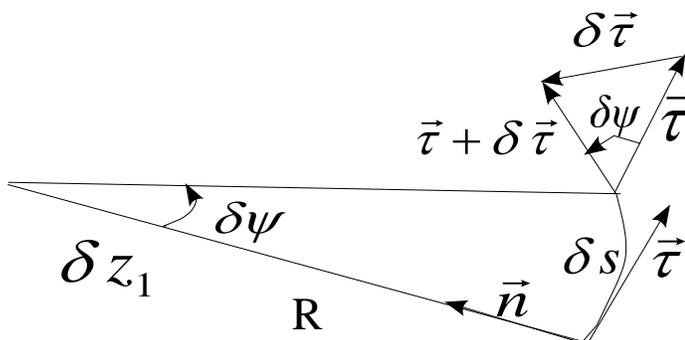


Fig. (5.18b)

Le coordinate naturali servono in particolare a rappresentare moti orizzontali non rettilinei⁽²³⁾ descritti dal modulo $U = (u^2 + v^2)^{1/2}$ della velocità sul piano orizzontale, relativamente al riferimento non inerziale della Terra.

⁽²³⁾ tale rappresentazione è idonea a descrivere l'accelerazione vettoriale, dal punto di vista *sostanziale*, o *lagrangiano*, di flussi atmosferici lungo traiettorie non prestabilite la cui configurazione spaziale sia indipendente dal tempo (flussi stazionari)

R è il raggio di curvatura seguendo il moto della particella ed è, per convenzione, positivo quando il centro di curvatura è nella direzione positiva del versore \vec{n} . Pertanto, se $R > 0$, la particella fluida ruota a sinistra seguendo il moto, mentre il contrario accade se $R < 0$.

In questo sistema, la velocità orizzontale è:

$$\vec{U} = U\vec{\tau} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} \quad (5.77)$$

L'accelerazione seguendo il moto, o accelerazione sostanziale, è:

$$\vec{a}_{orizz} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{\tau} \frac{dU}{dt} + U \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{dt} \quad (5.78)$$

Dalla fig. (5.18b) si osserva che $\delta\psi = \frac{\delta s}{R} = |\delta\vec{\tau}|$, essendo $\vec{\tau}$ e $\vec{\tau} + \delta\vec{\tau}$ vettori unitari (versori).

Per $\delta s \rightarrow 0$, $\delta\vec{\tau}$ è parallelo a \vec{n} per cui:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R}$$

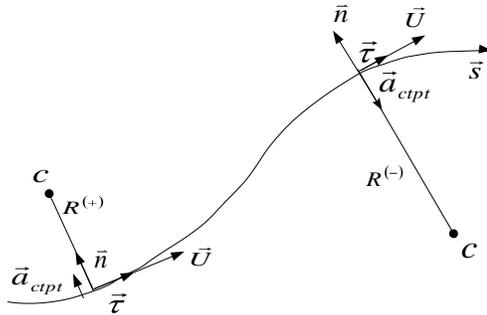
da cui:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R} U \quad (5.79a)$$

e

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{dU}{dt}\vec{\tau} + \frac{U^2}{R}\vec{n} \quad (5.79b)$$

In tal modo, l'accelerazione seguendo il moto viene ad essere separata in due componenti, l'una che rappresenta la variazione tangenziale del modulo della velocità, la seconda che rappresenta l'accelerazione centripeta dovuta alla curvatura della traiettoria, ossia alla variazione della direzione del moto.



L'equazione di conservazione della componente orizzontale della quantità di moto per unità di massa diviene pertanto, in coordinate naturali:

$$\frac{dU}{dt} \vec{t} + \frac{U^2}{R} \vec{n} + f \vec{k} \times U \vec{t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (5.80)$$

Le sue componenti valgono rispettivamente:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (5.81)$$

$$\frac{U^2}{R} + fU = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (5.82)$$

Il primo termine del primo membro della (5.82) ha segno positivo o negativo determinato dal segno di R, indicando così sempre una accelerazione centripeta.

La forza deviante di Coriolis entra solo nella componente normale, in quanto $f\vec{k} \times \vec{U} = fU\vec{n}$.

Se il movimento è parallelo alle isobare, $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ e, ovviamente, il modulo della velocità non cambia seguendo il moto.

Seguono nei prossimi paragrafi alcuni esempi notevoli di tipi di moto in coordinate naturali.

5.14.1 – Flusso geostrofico.

Se il flusso è parallelo alle isobare $\left(\frac{\partial p}{\partial s} = 0\right)$ e queste ultime sono rettilinee ($|R| \rightarrow \infty$), il flusso è in condizioni di moto geostrofico stazionario lungo \vec{s} , per cui le (5.81) e (5.82) divengono:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = 0 \\ fU_s = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \end{cases} \quad (5.83)$$

In coordinate isobariche, se il flusso è parallelo alle linee di ugual livello (o di uguale geopotenziale V , per cui è $\frac{\partial V}{\partial s} = 0$), il suo moto è stazionario lungo \vec{s} .

La (5.83) descrive la situazione di equilibrio rappresentata dalla figura (5.19).

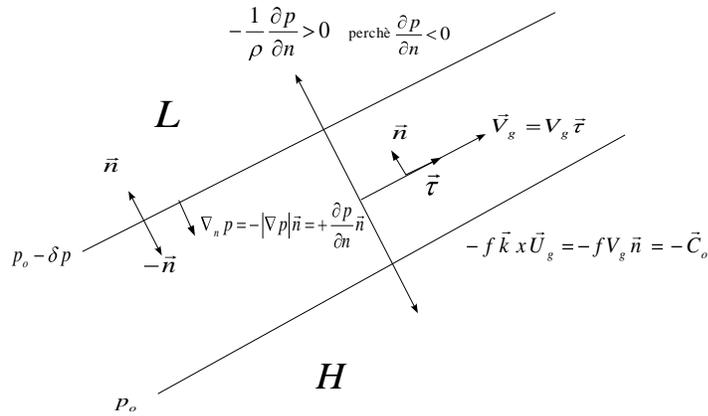


Fig. (5.19)

dove **L** e **H** indicano qui, rispettivamente, bassa (**L**ow) e alta (**H**igh) pressione.

5.14.2 – Flusso inerziale.

Se il campo della pressione è livellato $\left(\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial n} = 0\right)$, il flusso è rappresentato dalle equazioni:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = 0 \\ \frac{U^2}{R} + fU = 0 \end{cases} \quad (5.84)$$

dalla cui soluzione rispetto a R si ottiene il raggio di curvatura del moto:

$$R = -\frac{U}{f} \quad (5.85)$$

Il moto uniforme (in modulo) risultante dal bilancio della forza centrifuga e della forza di Coriolis prende il nome di moto (o flusso) inerziale e R è la

scala, o raggio, inerziale; poiché sia $|\vec{U}|$ sia R sono costanti, gli elementi fluidi percorrono traiettorie circolari in senso orario (o anticiclonico), dette *oscillazioni di inerzia*, con periodo:

$$T = \frac{2\pi R}{U} = \frac{2\pi}{|f|} = \frac{12 \text{ ore}}{|\sin \vartheta|} \quad (5.86)$$

T è anche detto *semi pendolo-giorno* (one-half pendulum day), ed è equivalente al tempo che un pendolo di Foucault alla latitudine θ impiega a ruotare di 180° il proprio piano di oscillazione.

I moti inerziali puri sono più importanti negli oceani (dove U è piccola) che in atmosfera.

5.14.3 – Flusso ciclostrofico.

Quando la scala L delle variazioni di velocità è piccola (moti a piccola scala, con R molto piccolo, determinati da piccole perturbazioni topografiche o termiche della superficie), l'accelerazione di Coriolis diviene trascurabile rispetto ai termini inerziali (accelerazione dovuta alla forza di gradiente di pressione) e all'accelerazione centrifuga. Il moto che ne consegue è detto *flusso ciclostrofico*, con grandi numeri di Rossby $\left[Ro = \frac{U}{fR} \cong 10^3 \right]$ e le sue equazioni in coordinate naturali hanno la forma:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ \frac{U^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \end{cases} \quad (5.87)$$

Considerando la seconda delle (5.77)²⁴ e risolvendola rispetto a U , si ottiene la velocità del *vento ciclostrofico*.

$$U = \sqrt{-\frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}} \quad (5.88)$$

Tale vento, realizzandosi per valori piccoli del rapporto $\frac{fU}{U^2} = \frac{fR}{U}$ fra

l'accelerazione di Coriolis e l'accelerazione centrifuga, è un vento che

appartiene alla categoria dei flussi con grandi numeri di Rossby $\left(\frac{U}{Rf}\right)$. Il

flusso ciclostrofico è tipico delle più intense perturbazioni a piccola scala (uragani, tornadi, ecc....) per le quali valori tipici di U sono dell'ordine di 30 m s^{-1} e le cui dimensioni sono dell'ordine di alcune centinaia di metri, dando luogo a numeri di Rossby dell'ordine di 10^3 .²⁵

Il vento ciclostrofico, per il quale l'accelerazione di Coriolis diviene ininfluyente, può essere sia ciclonico sia anticiclonico e presenta, come sole configurazioni dinamiche possibili, quelle indicate dalla figura (5.20); esse infatti sono le uniche a dare valori reali alla velocità ciclostrofica definita dalla (5.78).

²⁴ Infatti, per moti a piccola scala, è $\frac{\partial p}{\partial s} \cong 0$

²⁵ Vedere Cap. 8.

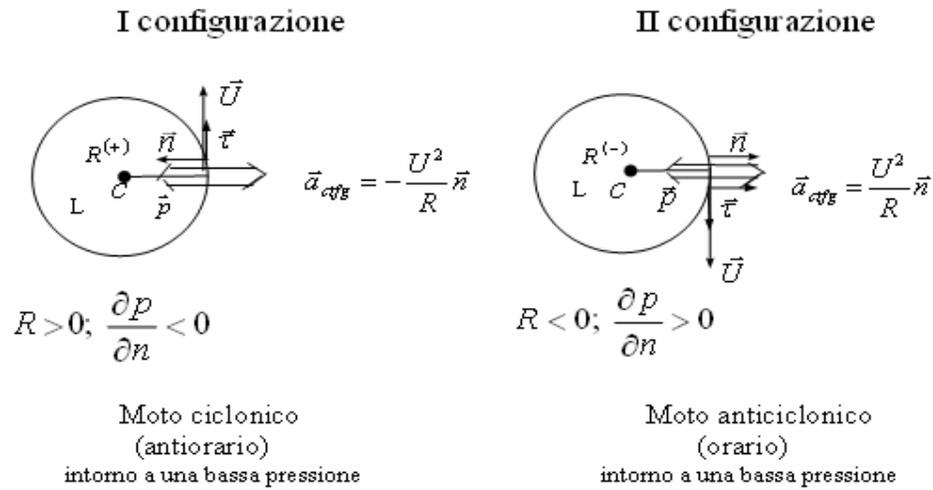


Fig (5.20)

La II configurazione potrebbe apparire anomala, in quanto la rotazione oraria sulla Terra è tipica delle alte pressioni. Non va però dimenticato che, per questo tipo di flusso, la forza apparente di Coriolis, che è la principale causa di rotazione oraria dell'aria intorno ai centri di alta pressione, è molto piccola.

5.14.4 – Vento di gradiente.

E' il vento che risulta dall'equilibrio della forza di Coriolis, di gradiente di pressione e centrifuga che, in assenza di attrito, sono orientate perpendicolarmente alle isobare, per cui la sua accelerazione seguendo il moto è nulla, in quanto $\frac{\partial p}{\partial s} = 0$ e in quanto vale la (5.82). Le equazioni del moto del vento di gradiente in coordinate naturali sono pertanto:

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} = 0 \\ \frac{U^2}{R} + fU = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} \end{cases}$$

Un caso particolare (con $\vec{a}_{cpi} = 0$ e $R \rightarrow \infty$) è il flusso geostrofico visto prima e riferito ad isobare rettilinee.

Il vento di gradiente, pur costituendo (rispetto al vento geostrofico) una approssimazione più realistica del vento reale in quanto include gli effetti delle curvature delle traiettorie, è tuttavia anch'esso difficilmente osservabile in natura.

Dalla (5.82) si deduce, per il modulo della velocità che soddisfa la condizione di equilibrio di vento di gradiente, la seguente espressione:

$$U = -\frac{fR}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f^2 R^2}{4} - \frac{R}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}\right)} \quad (5.89)$$

Le condizioni fisiche imposte dal modulo della velocità, che deve essere positivo e reale, indicano che non tutte le soluzioni della (5.89) sono accettabili.

Esistono tre configurazioni possibili (nel senso che assicurano soluzioni reali e positive per U). Per una di queste configurazioni esistono poi due soluzioni reali e positive, per cui, complessivamente, i “pattern” circolatori che hanno senso diventano quattro.

I soli quattro casi a cui corrispondono situazioni realistiche di vento di gradiente sono i seguenti [figure (5.21a-d)]:

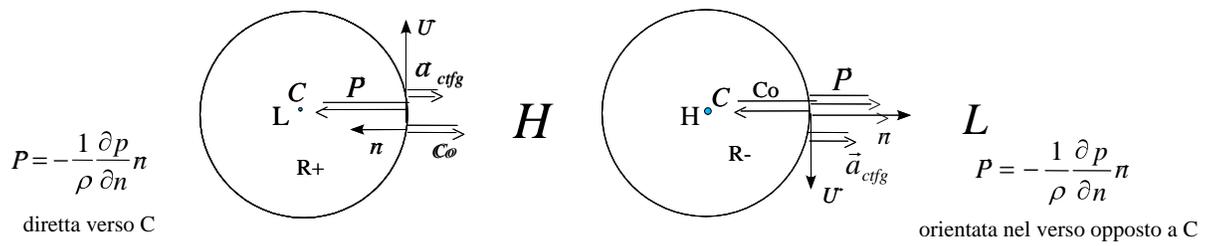


Fig. (5.21a)

Fig. (5.21b)

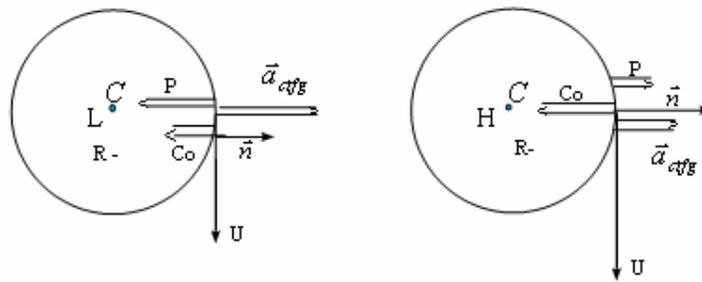


Fig. (5.21c)

Fig.(5.21d)

La fig. (5.21a) mostra un esempio cosiddetto di “bassa regolare” con un moto antiorario intorno al centro di bassa pressione (L) e con i vettori \vec{C}_o e \vec{P} orientati in verso opposto.

La fig. (5.21b) mostra invece un esempio cosiddetto di “alta regolare” intorno al centro di alta pressione (H) e con i vettori \vec{C}_o e \vec{P} orientati in verso opposto.

La fig. (5.21c) e' invece un esempio di circolazione detta di "bassa anomala", in quanto il vento ruota in senso orario intorno al centro di bassa pressione (L). Solo in questo caso, inoltre, \vec{C}_o e \vec{P} hanno lo stesso verso.

La fig. (5.21d) e', infine, un esempio di circolazione detta di "alta anomala", caratterizzata da un valore molto elevato della velocita' \vec{U} del vento che ruota in verso orario. L'anomalia sta nel fatto che, normalmente, il vento ruota in verso orario intorno ai centri di alta pressione (H) ma con intensita' ridotta. Con riferimento a queste due ultime figure, infatti, esiste la condizione supplementare, posta dalla (5.89) sul gradiente normale di pressione, data da:

$$\left| \frac{\partial p}{\partial n} \right| < \frac{\rho |R| f^2}{4} \quad (5.90)$$

Tale condizione, che assicura che le soluzioni della (5.89) sono reali, mostra che i gradienti normali di pressione nelle regioni di alta pressione devono decrescere con R, ossia verso il centro, con legge approssimativamente lineare. Questo, in quanto le pressioni - nelle aree anticicloniche - devono essere livellate e pertanto i venti devono essere deboli.

5.15 – Atmosfera baroclinica e barotropica: il vento termico.

Abbiamo finora visto che il modulo del vento geostrofico dipende dal gradiente, lungo le direzioni degli assi x e y , del geopotenziale V calcolato sulle superfici isobariche (cioè dipende dalle derivate di V rispetto a x e y , fatte mantenendo costante la pressione).

Dimostriamo ora che la sua variazione con la quota dipende dal gradiente “orizzontale” della temperatura, $\nabla_p T$, calcolato anch’esso sulle superfici isobariche.

Quando le condizioni atmosferiche sono tali per cui $\nabla_p T \neq 0$, l’atmosfera si dice **baroclina**; la densità è funzione sia di p sia di T [$\rho = \rho(p,T)$], per cui le superfici isobariche non coincidono con quelle di densità costante. Questo si vede immediatamente differenziando, a pressione costante - ossia su una superficie isobarica - l’equazione di stato dei gas: $pa = R_d T$. Si ha infatti:

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \vec{j} \right)_p = \nabla_p \alpha$$

$$\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} \vec{j} \right)_p = \nabla_p \alpha = \frac{R_d}{p} \nabla_p T$$

essendo $\alpha = \frac{R_d T}{p}$.

Poiché $\nabla_p \alpha$ rappresenta l’inclinazione della superficie $\alpha = \text{cost}$ rispetto alla superficie $p = \text{cost}$ [Fig. (5.22a)] si vede che tale inclinazione è funzione di $\nabla_p T$. In particolare, se $\nabla_p T = 0$, è anche $\nabla_p \alpha = 0$ e l’atmosfera si dice allora **barotropica**.

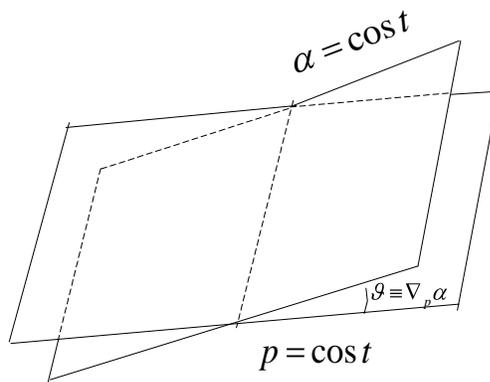


Fig (5.22a)

Consideriamo quindi la situazione rappresentata in fig. (5.22b), che mostra che il vento termico (geostrofico) puo' variare sia in modulo sia in direzione.

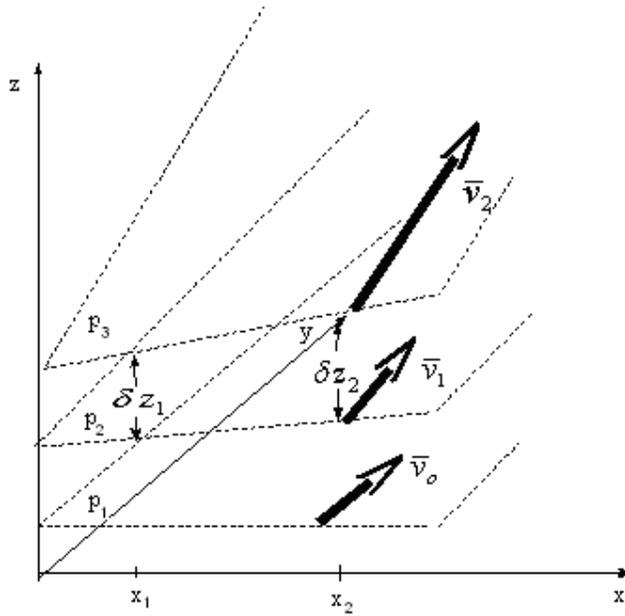


fig. (5.22b)

Ricordando la formula idrostatica, vediamo che l'incremento di quota dz corrispondente a un determinato cambiamento di pressione dp rispetto alla pressione p di una superficie isobarica data è:

$$\delta z = -\frac{\delta p}{p} \frac{R_d T}{g} \quad (5.91)$$

Poiché in fig. (5.22b) le superfici isobariche sono rappresentate con inclinazioni diverse, per cui in corrispondenza di x_1 e x_2 si ha rispettivamente

$dz_1 < dz_2$, risulta dalla espressione ora scritta (5.91) che nei punti x_1 e x_2 di ogni superficie isobarica deve anche essere $T_{x_2} > T_{x_1}$.

Vediamo quindi che se le superfici isobariche hanno giaciture variabili con l'altezza, ciò è associato a un $\nabla_p T \neq 0$.

Vediamo però anche, sempre dalla medesima figura, che in questa situazione i gradienti orizzontali di pressione sono diversi alle varie quote e quindi diviene evidente, almeno qualitativamente, quanto detto prima sulla variazione del vento geostrofico con l'altezza in una atmosfera baroclina.

Per ottenere risultati più quantitativi, scriviamo le componenti del vento geostrofico \vec{U}_g e l'equazione idrostatica in coordinate isobariche:

$$v_g = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_p; \quad u_g = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_p \quad (5.92)$$

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\frac{R_d T}{p} \quad (5.93)$$

quest'ultima relazione essendo giustificata dalla (5.91) e dalla legge di stato dei gas.

Derivando le (5.92) rispetto a p e usando la (5.93), otteniamo:

$$p \frac{\partial v_g}{\partial p} = \frac{\partial v_g}{\partial \log p} = -\frac{R_d}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_p$$

$$p \frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{\partial u_g}{\partial \log p} = +\frac{R_d}{f} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_p$$

Ossia:

$$\frac{\partial \vec{U}_g}{\partial \log p} = -\frac{R_d}{f} \vec{k} \times (\nabla T)_p \quad (5.94)$$

L'equazione (5.94) è l'equazione *differenziale* del vento *termico* ed esprime l'entità della variazione verticale (o “shear” verticale) del vento rispetto al vento geostrofico definito ad un livello di riferimento.

La definizione convenzionale di vento termico è, tuttavia, “strettamente” << *la differenza vettoriale fra i venti geostrofici a due livelli* >>.

Se l'atmosfera è invece tale per cui la densità è funzione solo della pressione ($\rho = \rho(p)$), per cui le isobare sono anche superfici di densità costante e quindi di temperatura costante (atmosfera *barotropica*), il vento geostrofico [per la (5.94)] è costante con l'altezza, essendo $\nabla_p T = 0$.

Dalla (5.94), integrata fra due livelli p_o e p_1 , si ottiene, per le componenti del vento termico:

$$\begin{cases} u_T = -\frac{R_d}{f} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_p \log \left(\frac{p_o}{p_1} \right) \\ v_T = \frac{R_d}{f} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right)_p \log \left(\frac{p_o}{p_1} \right) \end{cases} \quad (5.95)$$

con \bar{T} temperatura media dello strato compreso fra i livelli p_o e p_1 .

Se invece ci rifacciamo all'ultima definizione che abbiamo dato di vento termico, abbiamo [vedi eq. (5.92)]:

$$\begin{cases} u_T = u_g(p_1) - u_g(p_o) = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (V_1 - V_o) \\ v_T = v_g(p_1) - v_g(p_o) = \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial x} (V_1 - V_o) \end{cases} \quad (5.96)$$

Integrando anche la (5.93) fra gli stessi limiti p_o e p_l e inserendo anche qui la temperatura media \bar{T} dello strato, si ha:

$$V_1 - V_o = R_d \log \left(\frac{p_o}{p_l} \right) \bar{T} \quad (5.97)$$

Questa ultima relazione, che non è altro se non l'equazione ipsometrica già vista nella Statica (vedi § Geopotenziale), mostra l'equivalenza della (5.95) e della (5.96). Infatti, possiamo scrivere:

$$-\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y} (V_1 - V_o) \equiv -\frac{R_d}{f} \log \left(\frac{p_o}{p_l} \right) \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) = -\frac{R_d}{f} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\log \frac{p_o}{p_l} \right) \bar{T} \right]$$

l'ultima uguaglianza essendo giustificata dall'indipendenza di $\log \frac{p_o}{p_l}$ da y , da

cui si ricava, per l'appunto, la (5.97), ossia $(V_1 - V_o) = R_d \log \frac{p_o}{p_l} \bar{T}$.

La quantità:

$$V_1 - V_o \Rightarrow \delta V$$

prende il nome di *spessore* dello strato ($p_o \div p_l$) in unità di geopotenziale. Dalla (5.97) si vede che lo *spessore* è proporzionale alla temperatura media dello strato, per cui le linee di $\delta V = cost$ rappresentano le isoterme delle temperature medie degli strati. Inoltre, la quantità $\delta V / g \Rightarrow \delta z$ rappresenta approssimativamente lo spessore in altezze di geopotenziale. Scrivendo la (5.96) in forma vettoriale:

$$\vec{U}_T = \frac{1}{f} \vec{k} \times \nabla_p (V_1 - V_0) = \vec{U}_{g_1} - \vec{U}_{g_0}$$

si vede che la direzione del vento termico è parallela alle isoterme, o linee di spessore costante, con l'aria calda sulla destra.

Se osserviamo una variazione di direzione del vento geostrofico con la quota in verso antiorario [fig. (5.23)] e costruiamo graficamente il vettore differenza \vec{U}_T , per quanto precede potremo tracciare le isoterme parallele a \vec{U}_T e con l'aria più calda alla sua destra; così, dalla semplice analisi della rotazione del vento con la quota, possiamo dedurre il campo di temperatura della massa d'aria coinvolta. La fig. (5.24) mostra un altro esempio di ricostruzione nel caso di rotazione oraria. Naturalmente, queste schematizzazioni sono approssimate, se non altro perché non abbiamo considerato gli attriti; comunque, per i flussi sinottici, si tratta di approssimazioni soddisfacenti, che consentono utili e affidabili analisi diagnostiche.

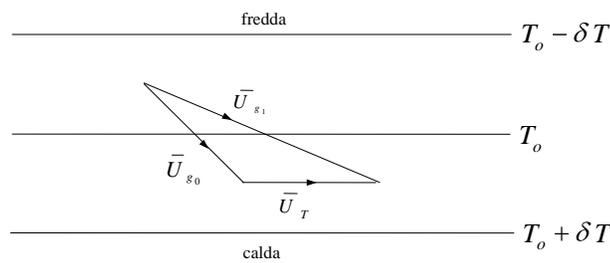


Fig. (5.22) avvezione fredda

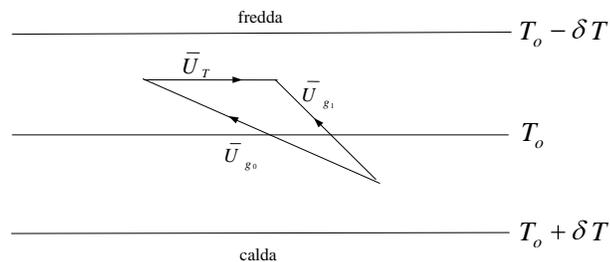


Fig. (5.24) avvezione calda

Le considerazioni sopra sviluppate mostrano come sia possibile ottenere, semplicemente dai dati di profili verticali di velocità di vento geostrofico (o prossimo a tale condizione) in un sito ottenuti con un solo sondaggio, stime sufficientemente attendibili dell'avvezione orizzontale di calore (che si manifesta come variazioni di temperatura nel tempo) e della sua variazione con la quota.

5.16 – Vorticità e circolazione.

5.16.1 – La vorticità.

Una caratteristica peculiare del campo fluidodinamico atmosferico è rappresentato dalla sua possibilità di essere spesso non conservativo (rotazionale), proprietà questa che viene espressa quantitativamente attraverso il concetto di campo vettoriale di *vorticità*.

La fluidodinamica consente tuttavia di *visualizzare*, e quindi illustrare in modo anche quantitativo, tale concetto di “*rotazione locale*”, detta anche microscopica o differenziale. Ciò che è peculiare di tale componente “*rotatoria*” è la conseguenza della *non rigidità* del corpo fluido che, a differenza di ciò che accade a un corpo solido, non consente di definire la componente rotatoria del moto attraverso la rotazione di una singola linea materiale tracciata nel corpo. Chiariamo meglio questa affermazione considerando, nell'intorno di un punto $P(x,y)$, un elemento infinitesimo di fluido, entro cui *tracciamo due* segmenti *materiali*²⁶ dx e dy , uscenti da P e perpendicolari fra loro fig.(525). Facciamo uscire da P anche due assi ortogonali x e y su cui giacciono dx e dy e che ruotano rispettivamente con le

²⁶ Una linea (o una superficie, o un volume) si dicono *materiali* se consistono sempre degli *stessi* elementi fluidi e sono quindi enti geometrici che si muovono con il fluido

stesse loro velocità angolari ω_1 e ω_2 . Dette u e v le velocità tangenziali degli assi x e y (e quindi anche di dx e dy) rispettivamente alle distanze $x+dx$ e $y+dy$, sarà:

$$-\delta u = \omega_2 \delta y; \quad \delta v = \omega_1 \delta x$$

da cui, al limite per $\delta x, \delta y \rightarrow 0$, si avrà:

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \omega_2; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \omega_1$$

Si definisce **vorticità** il doppio della media delle due velocità angolari ω_1 e ω_2 . Poiché nel caso del moto bidimensionale rappresentato nella fig. (5.25) si hanno due soli assi coordinati (x e y), il vettore vorticità ha, in questo caso, la sola componente verticale definita da:

$$\omega_z = 2 \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.98)$$

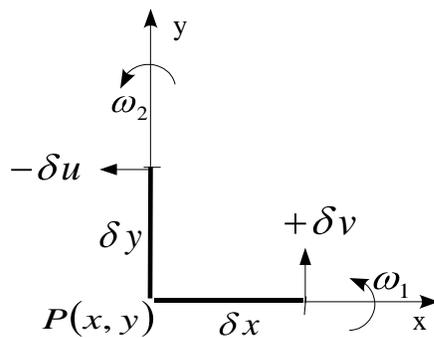


Fig. (5.25)

Nel caso più generale di moto tridimensionale, si definiscono in modo analogo le altre due componenti della vorticità:

$$\omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5.99)$$

Esse, insieme alle (5.98), esprimono le relazioni fra le componenti di $\vec{\omega}$ e quelle di \vec{U} in un sistema cartesiano e possono essere conglobate nella relazione vettoriale:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{U} \quad (5.100)$$

che mostra che il campo vettoriale $\vec{\omega}$ (campo della vorticità) altro non è se non il campo vettoriale del rotore di \vec{U} .

Nei moti atmosferici a mesoscala e a scala sinottica, che sono prevalentemente orizzontali, si considera però in generale solo la componente ω_z .

Le (5.98) e (5.99) indicano che esiste vorticità se vi è variazione spaziale delle componenti della velocità; non è pertanto necessario che vi sia rotazione reale degli elementi fluidi, ma è sufficiente che la velocità varii lungo una direzione coordinata, ossia presenti la cosiddetta condizione di *shear* (ad esempio $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$ perché sia definita la componente ω_y della vorticità).

Se l'elemento fluido ruota rigidamente su se stesso con velocità angolare $\vec{\Omega}_o$, allora:

$$\vec{\omega} = 2\vec{\Omega}_o \quad (5.101)$$

Detta A una superficie nel fluido racchiusa da un contorno C [fig. (5.26)], il teorema di Stokes stabilisce che:

$$\iint_A \text{rot} \vec{U} \cdot \vec{n} dA = \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} \quad (5.102)$$

per cui il flusso del rotore di \vec{U} attraverso una superficie aperta qualunque A, di contorno C, è uguale alla circolazione del vettore velocità \vec{U} lungo il contorno C di A. Al limite per una superficie circolare molto piccola dA di raggio r_o , il teorema del valor medio permette di scrivere:

$$\overline{|\vec{\omega}_n|} = \frac{|\vec{U}_c| l}{\delta A} = 2 \frac{|\vec{U}_c|}{r_o} \quad (5.103)$$

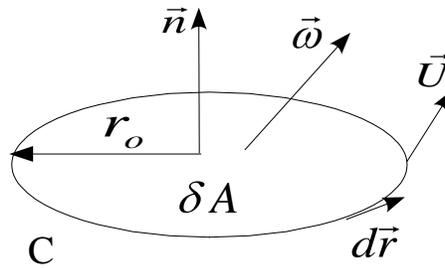


Fig. (5.26)

$\overline{|\vec{\omega}_n|}$ rappresentando la media del modulo della componente normale della vorticità nell'area δA e $|\vec{U}_c|$ la media del modulo di \vec{U} lungo il contorno C. La (5.103) mostra che la vorticità normale media, relativa all'area δA , è il doppio della velocità angolare media $|\vec{U}_c|/r_o$.

La vorticità osservata da un sistema di riferimento inerziale prende il nome di vorticità assoluta $\vec{\omega}_a$ e vale [vedi anche le relazioni (5.100) e (5.101)]:

$$\vec{\omega}_a = \nabla \times [\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}] = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega} \quad 27 \quad (5.104)$$

essendo $\vec{\Omega} \times \vec{r}$ la velocità (detta anche di trascinamento, \vec{u}_T) di un punto solidale con il sistema non inerziale che ruota con la velocità angolare $\vec{\Omega}$ e \vec{U} la velocità relativa nel sistema non inerziale. Ossia, la vorticità assoluta $\vec{\omega}_a$ di una generica particella fluida sulla Terra è la somma della vorticità planetaria (o di trascinamento) $2\vec{\Omega}$ e della vorticità relativa $\vec{\omega}$.

L'ordine di grandezza di scala della componente verticale della vorticità relativa è dato dal rapporto fra la velocità di scala orizzontale U e la lunghezza di scala orizzontale L , ossia:

$$\omega_z = O\left(\frac{U}{L}\right)$$

ed è dell'ordine di 10^{-5} (s^{-1}).

Il suo rapporto rispetto a f è proporzionale al numero di Rossby locale:

$$\frac{\omega_z}{f} = \frac{U}{fL} = \frac{U}{2\Omega L \sin \vartheta} \equiv R_o$$

che, per i moti a scala sinottica, è dell'ordine di 10^{-1} .

Poiché $\sin \vartheta = O(1)$ tranne che in prossimità dell'Equatore, flussi con piccoli numeri di Rossby (dell'ordine detto sopra) hanno vorticità relativa trascurabile rispetto a quella planetaria. Poiché piccoli numeri di Rossby sono tipici dei moti a grande scala [vedi § 5.12], ne consegue che per questa classe di moti, che non può avere vorticità nulla, la vorticità è essenzialmente di tipo planetario.

Per definizione, la vorticità è un vettore a divergenza nulla, cioè solenoidale:

²⁷ $\vec{\omega}_a$ e' anche definita come il rotore della velocità $\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}$ osservata dal sistema di riferimento non rotante.

$$\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot \vec{\omega}_a = \begin{cases} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{U}) \\ \nabla \cdot (\nabla \times \vec{U}_a) \end{cases} = 0 \quad (5.105)$$

Si definisce *linea di vortice*, o *filamento di vortice*, o *filamento vorticoso*, una linea di fluido parallela, in ogni punto, al vettore vorticità nel medesimo punto. I filamenti di vortice associati alla vorticità planetaria $2\vec{\Omega}$ sono pertanto rette parallele all'asse di rotazione terrestre, mentre i filamenti di vortice associati al flusso generale, cioè associati alla vorticità assoluta, presentano una distorsione, rispetto a quelli - tutti paralleli - associati alla vorticità planetaria, che è data dal contributo della vorticità relativa e che, ovviamente, è tanto più evidente quanto più intensa è la vorticità relativa.

Tubo di vortice è invece la superficie formata dalle linee di vortice passanti per una curva chiusa arbitraria C . Sulla superficie di un tubo di vortice, per la definizione che di esso si è appena data, non può esservi nessuna componente della vorticità che penetri al suo interno. Inoltre, per la (5.105), si ha che per volumi arbitrari:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{\omega}) dV = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{\omega}_a) dV = 0 \quad (5.106)$$

Si definisce flusso, o forza, di un tubo di vortice la quantità:

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} dA \\ \Gamma &= \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (5.107)$$

Se rappresentiamo il campo della vorticità planetaria come una distribuzione uniforme di linee di vortice rettilinee, tutte parallele a $\vec{\Omega}$, la differenza ($G_a -$

G) è proporzionale al numero di linee di vortice planetarie che attraversano A (ovvero che sono racchiuse dal contorno C di A).

Dalla (5.104) $\{ \vec{\omega}_a = \nabla \times [\vec{U} + \vec{\Omega} \times \vec{r}] = \vec{\omega} + 2\vec{\Omega} \}$ si ricava inoltre che:

$$\Gamma_a = \iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} \, dA = \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dA + \iint_A 2\vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, dA = \Gamma + 2 \iint_A \vec{\Omega} \cdot \vec{n} \, dA,$$

ossia, essendo $\vec{\Omega}$ un vettore costante nello spazio:

$$G_a = G + 2OA_n, \quad (5.108)$$

dove A_n è la proiezione di A sul piano perpendicolare a $\vec{\Omega}$ [vedi fig. (5.27)].

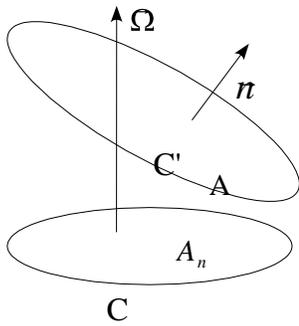


Fig. (5.27)

Oltre al tubo di flusso, conviene definire anche il concetto di “segmento di tubo di flusso”, che è un “tratto” di tubo di lunghezza “ l ” ottenuto “affettando” il tubo mediante una sua intersezione con due piani, comunque orientati, posti a una distanza “ l ” l’uno dall’altro, e considerando il tratto di tubo così ottenuto, il quale avrà un volume V racchiuso da una superficie chiusa, che chiameremo S_{tot} , formata dalla superficie laterale S del tratto di tubo e dalle due sezioni che lo delimitano, che chiameremo A e A' [fig. (5.27a)], le cui rispettive normali saranno \vec{n} e \vec{n}' .

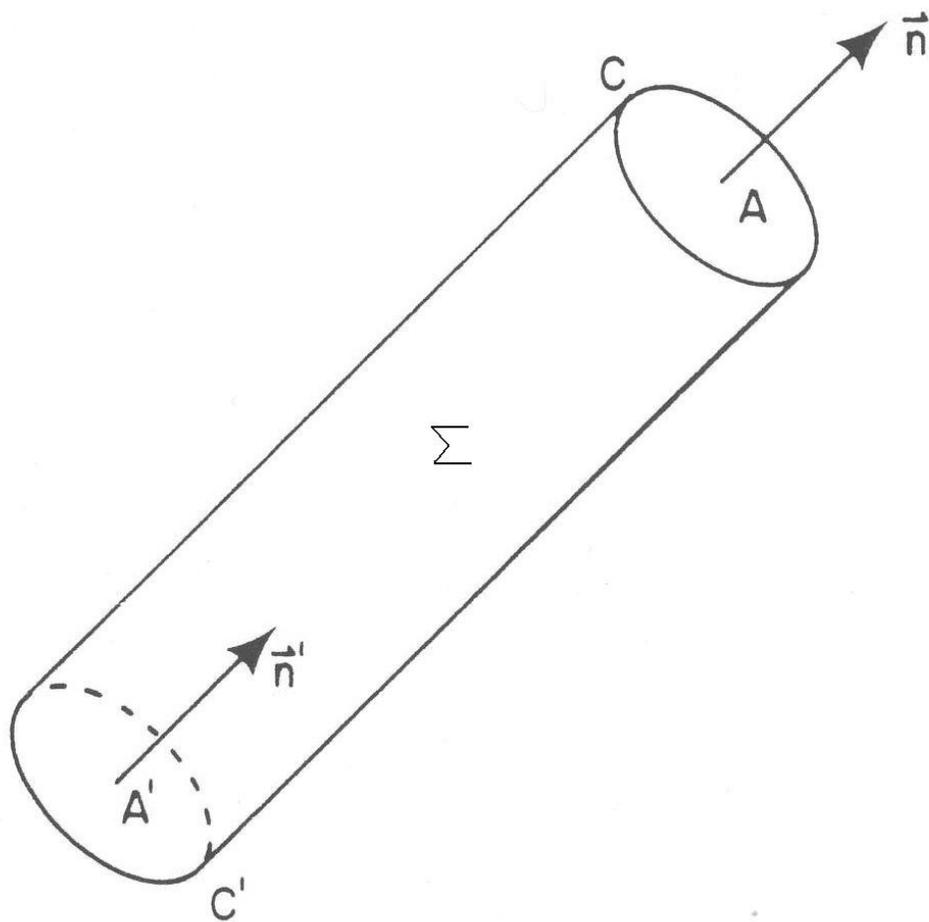


Fig. (5.27a)

In tal modo:

$$S_{\text{tot}} = S + A + A'$$

Se il verso della normale \vec{n} di A è concorde con l'orientamento dei filamenti di vortice, sulla sezione A' dovremo considerare il versore normale \vec{n}' orientato nel verso opposto a quello dei filamenti vorticosi del tubo, ossia $\vec{n}' = -\vec{n}$. La ragione di ciò risiede nel fatto che, in alcuni calcoli che seguiranno, dovremo rispettare la regola convenzionale per la quale, in ogni punto di una superficie chiusa, la normale deve essere rivolta verso l'esterno.

Un esempio immediato di ciò si ha nel caso in cui si intenda applicare il teorema della divergenza:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{\omega}_a) dV = 0 = \iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} dA = \Gamma_a \quad (5.108a)$$

ad un segmento di tubo di vortice di volume V delimitato da due superfici A e A' le cui normali sono rispettivamente \vec{n} e, per l'appunto, $\vec{n}' = -\vec{n}$.

Si ha in questo caso (ricordando che la divergenza del rotore di un vettore è uguale a zero e che il flusso di $\vec{\omega}_a$ attraverso la superficie laterale S del tubo è nullo, per cui il secondo membro del teorema della divergenza (5.108a) considera solo le superfici A e A'):

$$\begin{aligned} \iiint_V (\nabla \cdot \vec{\omega}_a) dV &= \iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} dA + \iint_{A'} \vec{\omega}_a \cdot (\vec{n}') dA = \\ &= \iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} dA + \iint_{A'} \vec{\omega}_a \cdot (-\vec{n}) dA = 0 \end{aligned} \quad (5.109)$$

da cui si ottiene il risultato:

$$\iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} dA = \iint_{A'} \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} dA$$

che dimostra la proprietà di G_a , o di G , di essere costanti lungo il tubo di flusso, per cui le linee di vortice di un tubo di flusso, siano esse assolute o relative, non possono avere origine e termine all'interno del fluido, ma devono propagarsi attraverso di esso e terminare solo sulla superficie che contiene e delimita il fluido, oppure devono chiudersi su se stesse nel fluido

5.16.2 – La circolazione.

Riscriviamo la (5.102) per la vorticità assoluta (o inerziale) e per quella relativa, rispettivamente:

$$\begin{aligned}\Gamma_a &= \iint_A \vec{\omega}_a \cdot \vec{n} dA = \oint_C \vec{U}_a \cdot d\vec{r} \\ \Gamma &= \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r}\end{aligned}\quad (5.109a)$$

L'integrale di linea di $\vec{U}_a(\vec{U})$ lungo la curva chiusa C prende il nome di *circolazione* della velocità assoluta (relativa), ed è pertanto anch'esso una misura della forza del tubo di vortice. Nel seguito, Γ_a e Γ verranno rispettivamente chiamate, per brevità, *circolazione assoluta* e *circolazione relativa*.

In fluidodinamica assume una particolare importanza la variazione, nel tempo e nello spazio (variazione sostanziale, lagrangiana), della circolazione relativa intorno a una curva C composta di punti materiali che si muovono insieme al fluido.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{U} \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r}) \quad (5.110) \quad ^{28}$$

²⁸ Le uguaglianze fra i tre membri della [5.110] sono una conseguenza della proprietà degli integrali curvilinei "chiusi" di avere limiti di integrazione coincidenti e indipendenti da (x,y,z) , e di essere solo funzione della curva chiusa C e, nel caso di C che si deforma nel moto, di t . Pertanto, limitandoci per semplicità al caso di una funzione della sola x e di t [f(x,t)] e ricordando il teorema della media di Leibniz,

avremo che: $\frac{d}{dt} \oint_C f(x,t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \oint_C f(x,t) dx + u \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \oint_C f(x,t) dx \right\}$ (5.110a). Indicando con $g(t,c)$

l'integrale $\oint_C f(x,t) dx$, la (5.110.a) diventa:

$$\frac{d}{dt} \oint_C f(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} g(t,c) + u \frac{\partial}{\partial x} g(t,c) = \oint_C \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) dx \equiv \oint_C \frac{d}{dt} f(x,t) dx$$

essendo: $\frac{\partial}{\partial x} \oint_C f(x,t) dx = \frac{\partial}{\partial x} g(t,c) = 0$ e $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{d}{dt}$ perché $u \frac{\partial}{\partial x} g(t,c) = 0$

Il significato del termine $\frac{d}{dt}(d\vec{r})$ è quello di variazione del segmento elementare che unisce due punti fluidi P e Q adiacenti appartenenti a C [fig. (5.28)] ed è diverso da zero solo se le velocità di P e Q sono diverse fra loro.

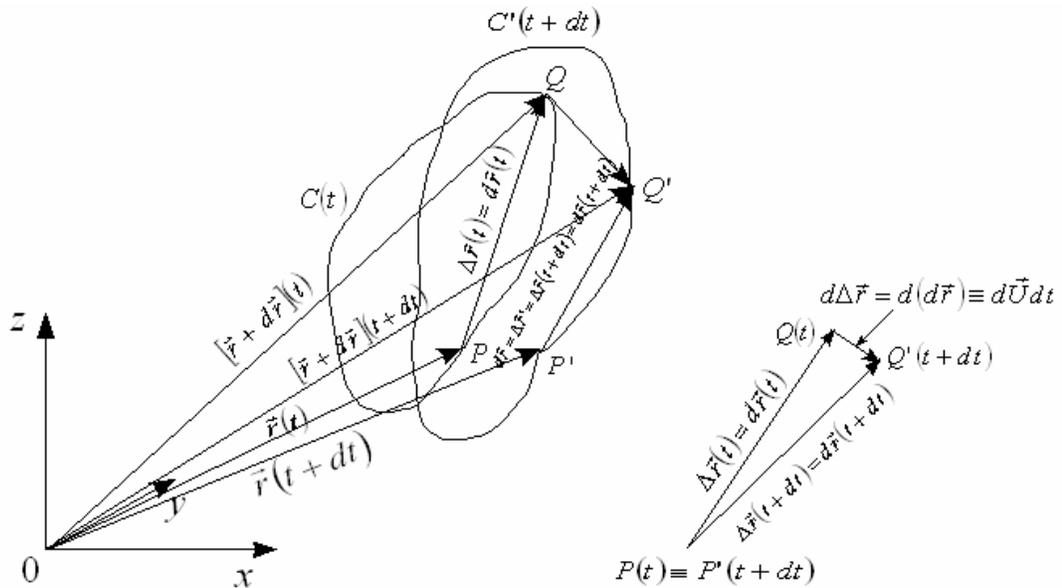


Fig. (5.28)

Pertanto:

$$\frac{d}{dt}(d\vec{r}) = d\vec{U}$$

Poiché C è una curva *materiale*, $\frac{d}{dt}(d\vec{r})$ è determinato unicamente dal campo della velocità del fluido, per cui la (5.110) diviene:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_C \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{U} = \oint_C \frac{d\vec{U}}{dt} \cdot d\vec{r} \quad (5.111)$$

essendo:

$$\oint_C \vec{U} \cdot d\vec{U} = \frac{1}{2} \oint_C dU^2 = 0 \quad (\text{differenziale esatto})$$

La (5.111) esprime il fatto che la variazione sostanziale della circolazione relativa è data dall'integrale di linea intorno a C dell'accelerazione relativa.

Dall'equazione del moto (5.23) segue che:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_C (2\vec{\Omega} \times \vec{U}) \cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_C \frac{\vec{F}_r}{\rho} \cdot d\vec{r} \quad (5.112)$$

essendo ovviamente nullo l'integrale di $\vec{g} = \nabla V$ esteso a una linea chiusa. Ciò corrisponde al fatto ben noto che le forze conservative non possono cambiare la circolazione relativa. La (5.112) rappresenta anche, da un punto di vista fisico, il meccanismo attraverso il quale la baroclinicità permette la conversione di parte dell'energia potenziale in energia cinetica.

Dalla (5.112), che esprime anche la legge di conversione di energia potenziale in energia cinetica, vediamo che esistono tre processi fisici che possono dar luogo a variazioni della circolazione relativa. Essi, considerati separatamente, ossia come se fossero, di volta in volta, gli unici ad agire, sono ciascuno legato a uno specifico termine del II membro dell'equazione (5.112).

L'espressione della circolazione della forza d'attrito per unità di massa, che costituisce l'ultimo termine della (5.112), appare diversa da quella utilizzata in altre parti del testo, ove la forza d'attrito per unità di massa è rappresentata

dal simbolo \vec{f}_r anziché $\frac{\vec{F}}{\rho}$. In realtà, le due espressioni si equivalgono, dal

momento che la forza \vec{F} è ora una forza per unità di volume data (seguendo la scelta del testo di Pedlosky) da $\mu(\Delta^2 \vec{U})$, dove il simbolo Δ^2 rappresenta il

Laplaciano. Con questa premessa, è evidente l'equivalenza di $\frac{\vec{F}}{\rho}$ e di f_r , ricordando che $\mu = \rho v$, per cui $\frac{\vec{F}}{\rho} = \mu/\rho(\Delta^2 \vec{U}) = v(\Delta^2 \vec{U})$, le cui unità di misura sono $[ms^{-2}]$, ossia quelle di un'accelerazione.

1) – La circolazione della forza di Coriolis per unità di massa (o accelerazione di Coriolis).

Per comprendere il significato fisico dell'azione svolta dalle sole forze di Coriolis sulla variazione della circolazione relativa Γ , consideriamo un moto divergente, ossia tale per cui \vec{U} sia diretto radialmente verso l'esterno ($\vec{U} = \vec{U}_\perp$) rispetto ad una linea materiale chiusa C centrata in $+$ [fig. (5.29), con $\vec{\Omega}$ diretto verso l'alto, fuori pagina].

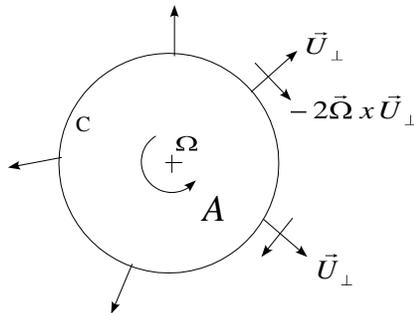


Fig. (5.29)

L'effetto della forza apparente di Coriolis che si sviluppa sarà quello di deflettere verso destra le traiettorie fluide, ossia di generare una circolazione relativa in senso orario lungo C , per cui $\frac{d\Gamma}{dt} < 0$, come espresso dal primo termine della (5.112).

Nel moto divergente rappresentato in fig. (5.29), la velocità radiale (verso l'esterno) \vec{U}_\perp tende ad allargare la linea materiale C (l'allungamento radiale

nel tempo dt della linea C è dato da $dl = U \cdot dt$). L'area A racchiusa da C pertanto vede aumentare il numero di linee di vortice planetarie che la attraversano, per cui devono ridursi le linee di vortice cicloniche relative che la attraversano, così da realizzare la condizione $\left[\frac{d\Gamma}{dt} < 0 \right]$. Modifichiamo la disposizione dei termini della (5.112), portando a primo membro il termine che esprime la circolazione delle forze di Coriolis. Otterremo:

$$\frac{d\Gamma}{dt} + \oint_C (2\vec{\Omega} \times \vec{U}) \cdot d\vec{r} = \frac{d\Gamma_a}{dt} = - \oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_C \frac{\vec{F}}{\rho} \cdot d\vec{r} \quad (5.112a)$$

Se peraltro, come abbiamo ipotizzato quando abbiamo inteso valutare il solo effetto delle forze apparenti di Coriolis sulla circolazione relativa, non vi sono forze reali in gioco, per cui la circolazione assoluta deve conservarsi, all'aumento di circolazione planetaria (o di trascinamento) deve corrispondere per la (5.104) una diminuzione di circolazione relativa e quindi di circolazione della velocità relativa intorno a C .

Un altro modo con il quale la forza di Coriolis può intervenire nel modificare la circolazione si ha quando la linea C oscilla, anche senza deformarsi, intorno alla direzione del vettore $\vec{\Omega}$, venendo così attraversata da un numero variabile di linee di vortice, variando quindi la circolazione della forza di Coriolis lungo essa.

Sia pure in modo qualitativo, abbiamo mostrato che ogni deformazione o rotazione di una curva materiale chiusa C che si muove con il fluido produce una variazione nella circolazione della vorticità relativa intorno ad essa e, precisamente, una diminuzione se la proiezione A_n dell'area A sul piano perpendicolare a $\vec{\Omega}$ aumenta e un aumento nel caso opposto. La relazione analitica che esprime questa legge di variazione è la seguente:

$$- \oint_C 2(\vec{\Omega} \times \vec{U}) \cdot d\vec{r} = - 2\Omega \frac{dA_n}{dt} \quad (5.113)$$

che deriva dall'equazione (5.108) ($\Gamma_a = \Gamma + 2\Omega A_n$), nella quale si sia posto $\Gamma_a = 0$, dal momento che non si considerano gli effetti delle forze reali (gradienti di pressione e attriti) ma solo quelli della forza *apparente* di Coriolis.

E' da notare l'analogia con la legge dell'induzione elettromagnetica.

2) – La circolazione delle forze di gradiente di pressione per unità di massa.

Analizziamo ora l'effetto sulla circolazione relativa esercitato dalla sola forza di gradiente di pressione per unità di massa. Riscriviamo il secondo termine a secondo membro della (5.112), che prende anche il nome di *termine solenoideale*, nel modo seguente, applicando il teorema di Stokes:

$$-\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} = - \iint_A \nabla \times \left(\frac{\nabla p}{\rho} \right) \cdot \vec{n} dA = \iint_A \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \cdot \vec{n} dA \quad (5.114)$$

Se il fluido é baroclinico [vedi § 5.15], il vettore $(\nabla \rho \times \nabla p)/\rho^2$ è diverso da zero e quindi la circolazione relativa varia nel tempo (purchè la normale alla superficie A formi con il vettore di cui sopra un angolo diverso da 90°). Come già ricordato precedentemente, si ha, in questo caso, una situazione analoga a quella che porta a definire, nell'elettromagnetismo, la forza elettromotrice.

Consideriamo la semplice situazione rappresentata in fig. (5.30), con i vettori ∇p e $\nabla \rho$ giacenti sulla superficie A e le superfici di pressione costante orizzontali.

Il fluido racchiuso nella parte a destra del contorno C è, a parità di livello barico $p = cost$, meno denso di quello che si trova nella parte a sinistra ed è, però, sottoposto al medesimo gradiente verticale di pressione $\nabla_v p$; perciò il

fluido a destra sarà accelerato verso l'alto in misura maggiore di quello a sinistra e, di conseguenza, si sviluppa una circolazione antioraria intorno a C. Un esempio di generazione di circolazione da parte dei solenoidi di pressione-densità è dato dallo sviluppo delle brezze di mare, già considerato (in modo elementare) nel Capitolo della Statica. Questi movimenti locali dell'atmosfera sono generati dalla differenza di temperatura ($\bar{T}_2 - \bar{T}_1$) che esiste fra la superficie del mare e quella della Terra ad esso contigua.

Se si suppone che, in una atmosfera baroclinica, la pressione alla superficie sia uniforme [fig. (5.31)], le superfici isobariche sovrastanti saranno inclinate (con inclinazioni diverse per via della baroclinicità) verso il basso dalla Terra all'Oceano, mentre al contrario accadrà per le superfici isosteriche (o isocoriche). Per semplicità, nella figura (5.31) le superfici isobariche e isosteriche sono state tracciate (non correttamente) con inclinazioni uguali alle diverse quote sopra il livello superficiale, lasciando le isobare orizzontali e inclinando le isosteriche dall'oceano alla terra.

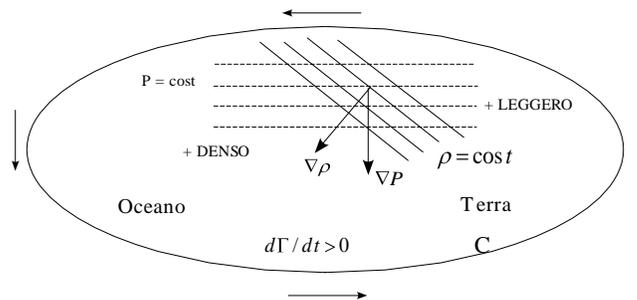


Fig. (5.30)

Se, nel termine solenoidale, introduciamo l'equazione di stato dei gas ($\rho = p/R_d T$) ponendo $dp/\rho = dp/\{p/R_d T\} = R_d T\{dp/p\}$, e calcoliamo l'integrale sulla linea chiusa C del primo e terzo termine dell'espressione appena ottenuta, otteniamo, per la variazione della circolazione relativa:

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_{\text{solenoidale}} = -\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} = -\oint_C \frac{dp}{\rho} = -\oint_C R_d T d \log p$$

Se la linea chiusa di integrazione è quella di fig. 5.31 ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$), gli unici tratti che danno un contributo sono quelli verticali (sugli altri è infatti $dp=0$).

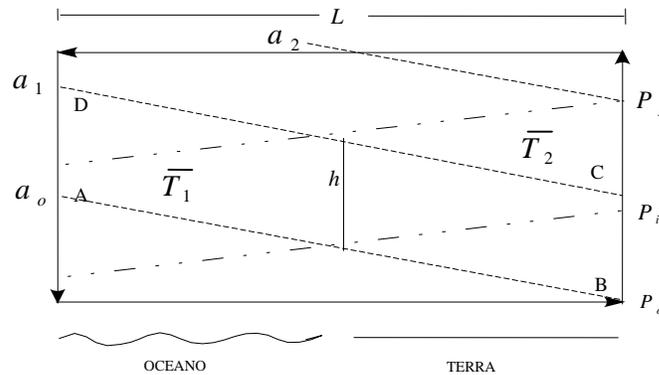


Fig. (5.31)

..... superfici isosteriche
 - - - - - superfici isobariche

Quindi:

$$\left(\frac{d\Gamma}{dt}\right)_{\text{solenoidale}} = R \log \left(\frac{p_0}{p_1} \right) (\bar{T}_2 - \bar{T}_1) > 0$$

Detto $|\vec{U}|$ il modulo della velocità tangenziale media lungo il circuito C, si trova in definitiva:

$$\frac{d|\vec{U}|}{dt} = \frac{R_d \log \left(\frac{p_0}{p_1} \right)}{2(h+L)} (\bar{T}_2 - \bar{T}_1)$$

essendo $G = \oint_C \vec{U} \cdot d\vec{r} = U \{2(h+L)\}$

Ponendo, ad esempio, $p_o = 103 \text{ kPa}$, $p_l = 93 \text{ kPa}$, $\bar{T}_2 - \bar{T}_1 = 10^\circ\text{C}$, $L = 20 \text{ km}$

e $h = 0.8 \text{ km}$, si avrà:

$$\frac{d|\bar{U}|}{dt} \cong 7 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$$

La circolazione di brezza che così si sviluppa è eccessiva rispetto alla realtà (sviluppa infatti una velocità dell'ordine dei 7 ms^{-1} dopo ~ 15 minuti); si è però qui trascurata l'azione smorzante della viscosità.

Se il fluido è barotropico, sappiamo che $\rho = \rho(p)$, da cui:

$$\oint_C \frac{\nabla p \cdot d\vec{r}}{\rho} = \oint_C \frac{dp}{\rho(p)} = 0$$

per la proprietà degli integrali delle funzioni di una sola variabile estesi a una curva chiusa. Si conferma con ciò, ancora una volta, che in un fluido barotropico non si possono sviluppare circolazioni chiuse, per cui si dice anche che le forze di galleggiamento in fluidi barotropici non modificano la proprietà di conservatività del campo gravitazionale terrestre.

3) – La circolazione delle forze esterne (di attrito, ecc.) per unità di massa.

Supponiamo che le forze esterne siano solo forze d'attrito, la cui relazione con il campo delle velocità è:

$$\vec{F} = \mu \nabla^2 \vec{U}$$

In questa forma, \vec{F} è la forza per unità di volume del fluido e $\frac{\vec{F}}{\rho}$ è

l'accelerazione impressa dalle forze d'attrito.

Allora:

$$\oint_C \frac{\vec{F}}{\rho} \cdot d\vec{r} = \frac{\mu}{\rho} \oint_C (\nabla^2 \vec{U}) \cdot d\vec{r} = \nu \oint_C (\nabla^2 \vec{U}) \cdot d\vec{r} = -\nu \oint_C (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r}$$

l'ultima uguaglianza derivando dalla relazione vettoriale:

$$\nabla \times \vec{\omega} = \nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U},$$

dalla applicazione della $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{U}$ (5.90) e dalla proprietà $\oint_C \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \cdot d\vec{r} = 0$.

In questo modo è dimostrato, anche qui, che $\frac{\vec{F}}{\rho} = \mathbf{f}_r$

L'attrito ha la proprietà di far diffondere la vorticità dalle regioni in cui essa è inizialmente concentrata a tutto il volume occupato dal fluido. Consideriamo la situazione rappresentata in fig. (5.32), nella quale la vorticità abbia la sola componente verticale ω_z ²⁹, il cui modulo cresce lungo il verso positivo dell'asse y, orientato verso l'interno della curva chiusa C, per cui:

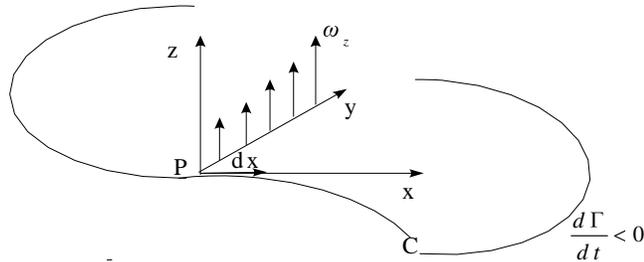


Fig. (5.32)

$$-v(\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r} = -v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} dx \quad (5.115)^{30}$$

$$^{29} \quad [\nabla \times \vec{\omega}]_y = \frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = 0 \quad [\nabla \times \vec{\omega}]_z = \frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} = 0$$

ricordando che: $\omega_y = \omega_x = 0$

$$^{30} \text{ Infatti: } (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot d\vec{r} = (\nabla \times \vec{\omega}) \cdot dx \vec{i} = [\nabla \times \vec{\omega}]_x dx = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} dx,$$

$$\text{essendo: } [\nabla \times \vec{\omega}]_x = \frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} = \frac{\partial \omega_z}{\partial y}$$

(essendo, nel caso specifico della fig. (5.32), $d\vec{r} = dx \vec{i}$)

La (5.115), ricordando la

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint_C (2\vec{\Omega} \times \vec{U}) \cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_C \frac{\vec{F}}{\rho} \cdot d\vec{r} \quad (5.112),$$

mostra che l'attrito riduce la forza del tubo di vortice in ragione proporzionale al gradiente della vorticità lungo la direzione perpendicolare a C .

Quindi, se la vorticità ω_z esternamente alla curva C è inferiore rispetto ai valori interni a C , le forze d'attrito la faranno diminuire *all'interno* di C , riducendo così il gradiente di ω_z lungo y (infatti, se C non si deforma, una riduzione di Γ corrisponde, per il teorema di Stokes, a una diminuzione di ω_z entro C ; all'esterno di C , ω_z resta invece costante). Ciò, per il teorema di Stokes, è rapportabile a un processo di diffusione della vorticità C verso l'esterno, in modo analogo a quanto si verifica per la diffusione del calore.

Si nota anche che l'attrito fa perdere ai filamenti vorticosi la proprietà di essere linee materiali.

5.17 – Il teorema di Kelvin della circolazione.

Dalle (5.108), (5.112) e (5.113) si è ricavata l'espressione per la variazione della circolazione assoluta:

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -\oint_C \frac{\nabla p}{\rho} \cdot d\vec{r} + \oint_C \frac{\vec{F}}{\rho} \cdot d\vec{r} \quad (5.116)$$

vedendo immediatamente che in un fluido barotropico e privo di attriti (almeno lungo la linea C):

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = 0 \quad (5.117)$$

ossia constatando che la circolazione assoluta si conserva seguendo il moto.

Questo è il *Teorema di Kelvin*.

Vediamo quindi che la (5.117) esprime anche la condizione a cui è soggetto il trasferimento di vorticità dalla componente relativa a quella planetaria, già discussa nel § (5.16.2 -1). Le variazioni di circolazione relativa indotte dai meccanismi considerati nel paragrafo precedente dovranno essere compensate da variazioni corrispondenti e di segno opposto di circolazione planetaria, così da conservare la circolazione assoluta. In conseguenza di ciò, anche la vorticità relativa e planetaria varieranno nel rispetto della condizione che la forza del tubo di vortice assoluto, definito dalla curva C che contorna l'area A , si mantenga costante⁽³¹⁾.

Inoltre, se A diminuisce per effetto di una contrazione di C , $\bar{\omega}_a$ dovrà aumentare in proporzione inversa alla diminuzione di A .

Ricordiamo ora altre due importanti proprietà che la circolazione assoluta possiede quando è soddisfatto il teorema di Kelvin:

- i tubi di vortice assoluto si muovono con il fluido;
- le linee di vortice assoluto (forma limite dei tubi di vortice quando la loro sezione tende a zero) si muovono con il fluido.

⁽³¹⁾ In altri termini, un fluido che sia barotropico e inviscido lungo una linea C , ha la proprietà che tale linea, muovendosi e deformandosi nel moto fluido, costituisce sempre il contorno di un tubo di vortice la cui forza assoluta rimane costante

In presenza di forze viscosse, le linee di vortice vengono allontanate, per diffusione, dagli elementi fluidi che le costituivano ad un certo istante di tempo preso come riferimento; se il fluido è baroclino, possono venire prodotte nuove linee e tubi di vortice, come si è già visto a proposito delle circolazioni di brezza di mare.

5.18 – L'equazione dinamica della vorticità.

La vorticità è un campo vettoriale non conservativo. Il campo scalare ad esso connesso, la circolazione, ne dà quindi solo una rappresentazione limitata, per cui si sente l'esigenza di approfondire ulteriormente la conoscenza delle proprietà vettoriali della vorticità.

Riscriviamo le equazioni di Navier-Stokes:

$$\rho \left(\frac{d\vec{U}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} \right) = -\nabla p - \rho \nabla \phi + \vec{F}$$

nella forma seguente:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \times \vec{U} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \left(\phi - \frac{U^2}{2} \right) + \frac{\vec{F}}{\rho} \quad (5.118)$$

nella quale si è applicata l'identità vettoriale:

$$\vec{\omega} \times \vec{U} = (\nabla \times \vec{U}) \times \vec{U} = (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{U} - \nabla \frac{U^2}{2}$$

Applicando alla (5.118) l'operatore ∇_x , otteniamo [ricordando che $(\nabla_x)\nabla=0$]

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla_x \left[(2\vec{\Omega} + \vec{\omega})_x \vec{U} \right] = \frac{\nabla \rho_x \nabla p}{\rho^2} + \nabla_x \left(\frac{\vec{F}}{\rho} \right) \quad (5.119)$$

Utilizziamo, a questo punto, l'identità vettoriale valida per vettori generici \vec{X} e \vec{Y} :

$$\nabla_x (\vec{X}_x \vec{Y}) = \vec{X} \nabla \cdot \vec{Y} + (\vec{Y} \cdot \nabla) \vec{X} - \vec{Y} \nabla \cdot \vec{X} - (\vec{X} \cdot \nabla) \vec{Y}$$

Sarà allora:

$$\nabla_x \left[(2\vec{\Omega} + \vec{\omega})_x \vec{U} \right] = (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \nabla \cdot \vec{U} + (\vec{U} \cdot \nabla) (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) - [(2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) \cdot \nabla] \vec{U}$$

essendo:

$$\nabla \cdot (2\vec{\Omega} + \vec{\omega}) = 0$$

La (5.119) diviene pertanto, ricordando che $\vec{\omega}_a = 2\vec{\Omega} + \vec{\omega}$ e che $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$,

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega}_a \cdot \nabla) \vec{U} - \vec{\omega}_a \nabla \cdot \vec{U} + \frac{\nabla \rho_x \nabla p}{\rho^2} + \nabla_x \frac{\vec{F}}{\rho} \quad (5.120)$$

essendo $\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{d}{dt}(2\vec{\Omega}) = \frac{d\vec{\omega}_a}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ (dal momento che $\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = 0$)³²

³² Questa proprietà vale solo per $\vec{\Omega}$, il vettore invariante su tutti i punti della sfera terrestre e costante nel tempo. Il parametro di Coriolis ($f = 2\Omega \sin \vartheta$) non gode invece di questa proprietà.

Abbiamo così ottenuto un'equazione per la vorticità relativa $\vec{\omega}$, che mostra che la sua variazione temporale dipende da quattro termini, due dei quali – il vettore baroclino $\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}$ e il rotore della viscosità – sono già stati esaminati e discussi nel § 5.17.

Ovviamente, essendo $\vec{\Omega}$ un vettore costante, la (5.120) diviene anche l'equazione della variazione nel tempo della vorticità assoluta $\vec{\omega}_a$.

A questo proposito, osserviamo che l'affermazione è vera in quanto si sono potuti porre uguali a zero, nella (5.110), sia il termine $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}$, sia il termine

$(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{\Omega}$ che compaiono nella trasformazione $\frac{d \vec{\Omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{\Omega}$, e questo

perché $\vec{\Omega}$ è un vettore indipendente dal tempo e dalle coordinate spaziali.

Con particolare riferimento al termine $(\vec{U} \cdot \nabla) \vec{\Omega}$, possiamo anche dire che è solo la somma delle sue tre componenti lungo un percorso meridiano ad avere la proprietà di essere uguale a zero (attraverso un trasferimento di vorticità planetaria d'avvezione fra le tre componenti); in questo modo, risulterà chiaro più avanti il significato dell'equazione (5.129) del § 5.21, ossia dell'equazione dinamica della sola componente verticale della vorticità (riferita, quest'ultima, al luogo d'osservazione), ove il termine di avvezione di vorticità planetaria, non più compensato dalle altre componenti, non può più essere posto uguale a zero.

Per quanto riguarda gli altri due termini della (5.120), ossia $(\vec{\omega}_a \cdot \nabla) \vec{U} - \vec{\omega}_a \nabla \cdot \vec{U}$, è possibile dimostrare che essi rappresentano il contributo alla variazione di vorticità relativa dato dallo *stiramento* del tubo di vortice (e quindi della convergenza delle linee di vortice) e dalla sua inclinazione, prodotta dalla variazione, lungo la direzione delle linee di vortice di $\vec{\omega}_a$, della componente della velocità ad esse perpendicolare

5.19 – La vorticità potenziale.

La (5.120) esprime le modalità secondo cui $\bar{\omega}$ varia in funzione dei meccanismi fisici che la possono influenzare. E' interessante ora vedere se esistono condizioni geofisiche che pongono anche restrizioni sull'entità dell'intervento simultaneo di ciascuno dei processi individuati, in quanto è ragionevole attendersi che in atmosfera un certo grado di baroclinicità, associato al vincolo che il moto segua traiettorie isentropiche, possa essere incompatibile con un certo altro grado di stiramento dei tubi di vortice, e così via per gli altri meccanismi.

Poiché $\bar{\Omega}$ è costante, la (5.120) si identifica, come si è già detto, con l'equazione dinamica per $\bar{\omega}_a$. Inserendo in essa la condizione di continuità:

$$\nabla \cdot \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

la (5.120) diviene:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{\omega}_a}{\rho} \right) = \left(\frac{\bar{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{U} + \nabla \rho \cdot x \frac{\nabla p}{\rho^3} + \frac{1}{\rho} \left(\nabla \cdot x \frac{\vec{F}}{\rho} \right) \quad (5.121)$$

Indichiamo ora con λ una proprietà scalare arbitraria del fluido (ad esempio, la densità, o la temperatura potenziale, ecc...). Facendo il prodotto scalare fra il gradiente di λ , $(\nabla \lambda)$, e la (5.121), si ottiene:

$$\nabla \lambda \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\bar{\omega}_a}{\rho} \right) = \left[\left(\frac{\bar{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{U} \right] \cdot \nabla \lambda + \nabla \lambda \cdot \left(\frac{\nabla \rho \cdot x \nabla p}{\rho^3} \right) + \frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot \left(\nabla \cdot x \frac{\vec{F}}{\rho} \right) \quad (5.122)$$

Sommando alla (5.122) l'identità vettoriale:

$$\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \lambda = \left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \right) \cdot \nabla \frac{d\lambda}{dt} - \left[\left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{U} \right] \cdot \nabla \lambda \quad (5.123)$$

otteniamo:

$$\nabla \lambda \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \right) + \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \frac{d}{dt} \nabla \lambda = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \lambda \right) = \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \left(\frac{d\lambda}{dt} \right) + \nabla \lambda \cdot \left[\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^3} \right] + \frac{\nabla \lambda}{\rho} \cdot \nabla \times \frac{\vec{F}}{\rho}$$

Se λ è una quantità che si conserva nel moto per ciascun elemento fluido, se $\vec{F}=0$ e se è verificata una delle seguenti condizioni:

- a) – il fluido è barotropico, ossia $\nabla \rho \times \nabla p = 0$
- b) - il fluido è baroclinico, ma λ è funzione solo di p e ρ , per cui:

$$\nabla \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial p} \nabla p + \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} \nabla \rho \quad \text{e} \quad \nabla \lambda \cdot (\nabla \rho \times \nabla p) = 0$$

allora la quantità:

$$P = \frac{\vec{\omega} + 2\vec{\Omega}}{\rho} \cdot \nabla \lambda = \frac{\vec{\omega}_a}{\rho} \cdot \nabla \lambda \quad (5.124)$$

che prende il nome di vorticità potenziale, è una costante del moto:

$$\frac{dP}{dt} = 0$$

Il significato fisico di questa nuova grandezza può essere chiarito anche in altro modo ricordando che, in un flusso non viscoso, si può scrivere:

$$\frac{d}{dt} \iint_A \bar{\omega}_a \cdot \bar{n} dA = \iint_A \left(\frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2} \right) \cdot \bar{n} dA \quad (5.125)$$

Se l'area A di integrazione appartiene ad una superficie su cui λ è costante (per cui, con riferimento alla fig. (5.33), \bar{n} è parallela a $\nabla \lambda$), e se λ si mantiene anche invariata nel moto, il contorno C dell'area A sarà composto di punti materiali che, non abbandonando tale superficie, conserveranno la quantità λ nel tempo⁽³³⁾.

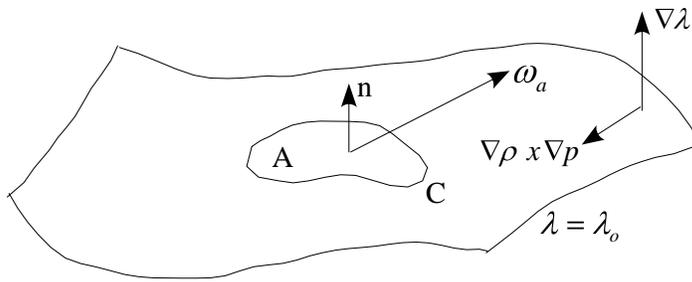


Fig. (5.33)

Se, infine, λ è anche funzione solo di ρ e di p , il vettore $\nabla \rho \times \nabla p$, perpendicolare a $\nabla \lambda$, giacerà sulla superficie $\lambda = cost$ e sarà perpendicolare a \bar{n} .

Quindi, la (5.125) dà, per il contorno C così prescelto [fig. (5.33)]:

$$\frac{d}{dt} \iint_A \bar{\omega}_a \cdot \bar{n} dA = 0$$

⁽³³⁾ Questa condizione equivale ad un moto vincolato a seguire traiettorie su superfici a λ costante (ad esempio, superfici isentropiche)

per cui è soddisfatto il teorema di Kelvin. Al limite per un circuito infinitesimale, si ha:

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega}_a \cdot \vec{n} dA) = 0 \quad (5.126)$$

Immaginiamo ora che un cilindretto elementare di sezione dA sia compreso fra due superfici a λ costante, distanti fra loro di dl [fig. (5.34)].

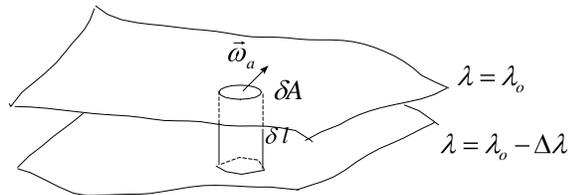


Fig. (5.34)

Sia $\Delta\lambda$ la differenza dei due valori che λ assume sulle due superfici. Per definizione di $\nabla\lambda$ si ha:

$$\delta l |\nabla\lambda| = \Delta\lambda$$

La massa $dm = \rho dA dl$ del cilindretto deve conservarsi nel tempo, perché il volume che la contiene è limitato dalle areole dA che sono superfici *materiali*: la (5.126) si può allora scrivere:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}_a \cdot \vec{n}}{\rho \delta l} \delta m \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}_a \cdot \vec{n}}{\rho} |\nabla\lambda| \frac{\delta m}{\Delta\lambda} \right) = 0$$

Essendo dm e $\Delta\lambda$ costanti, dovrà infine essere:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{\omega}_a \cdot \frac{\nabla \lambda}{\rho} \right) = 0 \quad (5.127)$$

avendo posto $|\nabla \lambda| = \bar{n} |\nabla \lambda|$

La (5.127) esprime nuovamente la condizione di conservazione della vorticità potenziale che, per quanto precede, corrisponde alla conservazione della massa compresa fra due superfici di equazione $\lambda = \text{cost}$.

Se le due superfici di λ costante si avvicinano, o si allontanano, $|\nabla \lambda|$ aumenta o diminuisce rispettivamente, per cui la (5.127) impone che la componente del vettore

$\frac{\vec{\omega}_a}{\rho}$ parallela a $|\nabla \lambda|$ diminuisca o aumenti in modo da mantenere la vorticità potenziale $P = \vec{\omega}_a \cdot \frac{\nabla \lambda}{\rho}$ costante.

Se ρ non cambia di molto, la variazione sarà tutta, o quasi tutta, in $\vec{\omega}_a$.

La (5.126), così come pure la (5.127), esprimono la forma più generale di conservazione della vorticità potenziale. Normalmente, però, si intende per vorticità potenziale la grandezza fisica che si ottiene ponendo, nella due equazioni sopraccitate, $\lambda = \vartheta$ (temperatura potenziale) e considerando il gradiente verticale di ϑ rispetto alla direzione verticale ($\bar{n} \equiv \vec{k}$), questa ultima riferita alle superfici di pressione anziché di altezza geometrica. In coordinate di pressione, la massa dm del cilindretto di fig. (5.34), dove ora dl deve immaginarsi sostituito da dp , diviene:

$$|dm| = \rho dA dz = dA \cdot \left| \frac{\delta p}{g} \right|$$

mentre il gradiente verticale di ϑ si trasforma (anche qui applicando l'equazione idrostatica) da $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial z}$ in $g \frac{\partial \vartheta}{\partial p}$. Infatti $\frac{dp}{dz} = -\rho g$, da cui si ricava

la relazione (*in valore assoluto*): $\rho dz = \frac{dp}{g}$.

Facendo le opportune sostituzioni nelle equazioni che hanno portato alla (5.127), quest'ultima diviene (in coordinate isobariche):

$$(\omega_a)_z \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = (\zeta + f) \frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \text{cost} \quad (5.128)$$

dove:

$$\begin{aligned} \zeta &= \omega_z \\ f &= 2\Omega \sin \vartheta \text{ (parametro di Coriolis locale)} \end{aligned}$$

ϑ essendo ora la latitudine.

La (5.128) prende il nome di legge di conservazione della vorticità potenziale nei moti adiabatici privi di attrito viscoso. Il tale forma essa esprime la misura del rapporto fra la vorticità assoluta e lo spessore efficace del vortice, rappresentato dalla distanza, misurata in unità di pressione, fra superfici a temperatura potenziale costante.

5.20 – Applicazioni della legge di conservazione della vorticità potenziale.

Vediamo, ora, alcuni esempi che aiutino a chiarire meglio il ruolo della vorticità potenziale nella interpretazione dei più importanti fenomeni che si osservano nei fluidi geofisici.

Incominciamo dal caso di un flusso d'aria in movimento zonale ad una certa latitudine ϑ_o per cui $\zeta_o = 0$ con $\frac{\partial \vartheta}{\partial p} = \text{cost}$ lungo la traiettoria, cosicché la legge di conservazione della vorticità potenziale durante il moto si riduce alla conservazione della vorticità assoluta, divenendo semplicemente $\zeta + f = f_o$, ossia $\zeta = f_o - f$.

Se la traiettoria dell'aria, dalla sua configurazione puramente zonale passa ad un'altra configurazione con una componente meridionale, ad esempio perché devia verso nord o verso sud, allora la legge di conservazione darà $\zeta = f_o - f < 0$ nel primo caso e $\zeta = f_o - f > 0$ nel secondo; ciò è dovuto al fatto che f aumenta al crescere della latitudine [fig. (5.35)]. Solo i flussi zonali da est soddisfano questa legge, in quanto la loro deflessione verso nord e verso sud, rispettivamente, fa diminuire o aumentare la vorticità relativa (ricordiamo che ζ è positiva se l'aria circola in senso antiorario).

Invece per i flussi atmosferici provenienti da ovest, la loro deflessione verso nord o verso sud significa, rispettivamente, aumento o diminuzione della vorticità relativa. Quindi:

- Le correnti atmosferiche zonali occidentali (da W) devono rimanere zonali perché sia soddisfatta la legge di conservazione della vorticità assoluta.
- Le correnti atmosferiche zonali orientali (da E) possono deviare sia verso N sia verso S senza violare la legge di conservazione della vorticità assoluta.

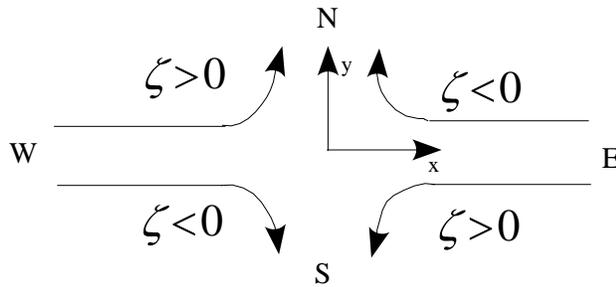


Fig. (5.35)

Si intravede già, da questa differenza di comportamento, un diverso grado di stabilità della masse d'aria in moto sul piano orizzontale; infatti, la restrizione imposta dalla legge di conservazione della vorticità assoluta obbliga le correnti occidentali a mantenere un percorso rettilineo e a smorzare eventuali oscillazioni lungo la direzione meridionale indotte da cause disturbanti, mentre lascia completamente libere le correnti orientali di amplificare le loro oscillazioni meridionali.

Nel caso più generale in cui $\frac{\partial \vartheta}{\partial p}$ sia variabile lungo la traiettoria, si riscontra che la condizione di conservazione della vorticità potenziale impone una ulteriore diversità di comportamento fra le correnti occidentali e quelle orientali.

Si abbia dunque, per cominciare, una corrente zonale occidentale ($\zeta = 0$), in movimento adiabatico attraverso una barriera montuosa [fig. (5.36)].

Dal momento che il moto è isentropico, ogni colonna verticale d'aria di massa M che era compresa fra le superfici isentropiche ϑ_0 e $\vartheta_0 + d\vartheta$ sopravvento alla montagna vi deve rimanere tal quale sia durante l'attraversamento del rilievo sia sottovento ad esso.

Poiché le superfici isentropiche, a mano a mano che aumenta la quota, seguono in modo sempre meno fedele l'andamento della topografia superficiale, la loro distanza varia lungo il moto, per cui la condizione di

conservazione della vorticità potenziale impone una diminuzione di vorticità relativa sulla montagna.

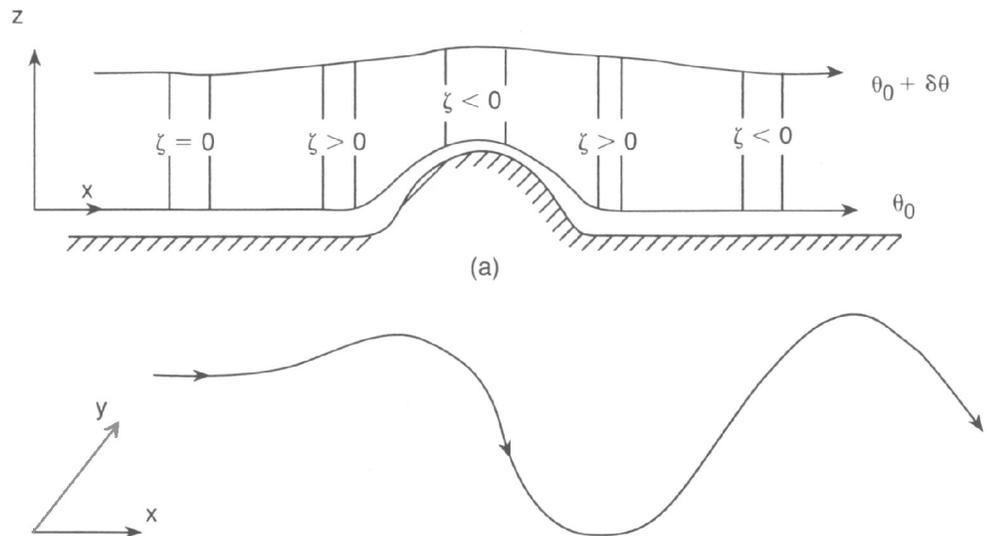


Fig. (5.36)

L'aria, quindi, sarà invitata a deviare verso Sud [nella fig. (5.36) il Nord è nel verso delle y crescenti, come da convenzione] nel suo moto ascendente e poi verso Nord nella ridiscesa successiva. In questa seconda fase, l'aria tende a ritornare alla latitudine da cui era ripartita; quando vi giunge, però, ha una componente di moto lungo il meridiano che prima non aveva, per cui essa oltrepassa tale posizione e prosegue il suo spostamento verso Nord, dove la vorticità planetaria aumenta facendo così decrescere la componente ciclonica della vorticità relativa; pertanto, la traiettoria si incurva dalla parte opposta, riportando l'aria verso Sud. In tale caso, la condizione di conservazione della vorticità potenziale impone alla traiettoria un andamento ondulatorio Nord-Sud sovrapposto al moto medio Ovest-Est.

Se la corrente atmosferica è invece di provenienza orientale, la situazione diviene la seguente [fig. (5.37)]. Nel passaggio sopra la montagna, l'aria

dovrebbe, come prima, perdere vorticità relativa, ossia la sua traiettoria dovrebbe assumere una curvatura anticiclonica. Se tuttavia ciò avvenisse, l'aria, andando verso le alte latitudini dove la vorticità planetaria cresce, dovrebbe ulteriormente girare anticiclonicamente per perdere la vorticità (componente planetaria) che le si viene ad aggiungere, e alla fine tornerebbe indietro, cosa che non accade nella realtà.

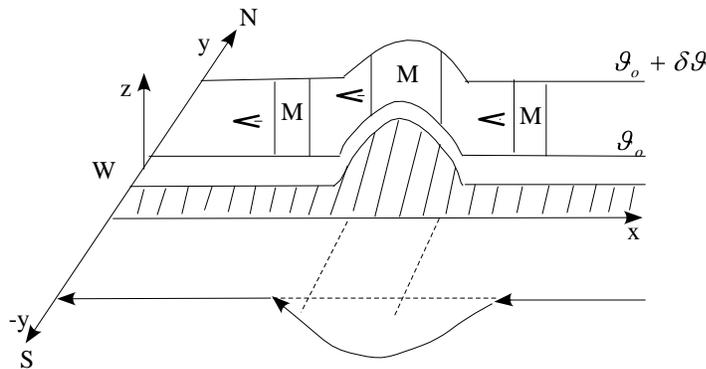


Fig. (5.37)

Allora, per evitare questa situazione non realistica, l'aria deve girare verso Sud prima di giungere alla base della montagna, e solo dal momento in cui ha inizio la rotazione anticiclonica. Gli opposti effetti si bilanciano in modo da riportare la traiettoria ad essere esattamente zonale in corrispondenza della sommità del rilievo. A creare le condizioni per la circolazione ciclonica sopravvento alla montagna é il campo barico che si viene a stabilire per effetto della forzatura orografica. Procedendo verso Sud, l'aria vede diminuire la vorticità planetaria nella stessa regione in cui la curvatura ciclonica fa aumentare quella relativa, con il risultato che la vorticità potenziale si conserva.

A mano a mano che si innalza lungo il crinale della montagna, però, l'aria deve perdere, per i motivi visti, vorticità e questo avviene dapprima a spese della vorticità planetaria che, nel moto verso Sud, decresce e, infine, con una deflessione anticiclonica della traiettoria [fig. (5.37)].

Infine, nella fase discendente, l'aria ritorna alla latitudine di partenza attraverso una successione di processi opposti a quelli descritti.

In conclusione:

- Le correnti zonali occidentali trasformano i disturbi generati dal rilievo che investono in fluttuazioni di tipo ondoso delle loro linee corrente sottovento.
- Le correnti zonali orientali smorzano i disturbi generati dal rilievo che investono.

Pertanto, la risposta che le correnti occidentali e orientali con stratificazione variabile lungo la traiettoria danno a disturbi verticali é, dal punto di vista della stabilità orizzontale, diversa e quasi opposta rispetto al caso, prima visto, di aria a stratificazione costante.

5.21 – Equazione della componente verticale della vorticità in coordinate cartesiane e di pressione.

Dalla (5.120) si ricava, per la variazione temporale della componente $(\omega_a)_z = (\zeta + f)$ nei moti sinottici, l'espressione in coordinate cartesiane:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} + (\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + v \frac{df}{dt} = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

Come si vede, compare in questo caso il termine $v \frac{df}{dt}$, nel quale v é la componente lungo l'asse y della velocità. Il termine $v \frac{df}{dt}$ corrisponde alla

componente verticale del vettore $(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{\Omega}$ il quale, nella (5.120), era nullo essendo $\vec{\Omega} = \text{cost}$; ora, però, $f = f(y)$.

Tenendo conto che $v \frac{df}{dy} = \frac{df}{dt}$, l'equazione precedente si trasforma nella:

$$\frac{d}{dt}(\zeta + f) = -(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (5.129)$$

e, in coordinate di pressione:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla(\zeta + f) - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - (\zeta + f) \nabla \cdot \vec{U} + \vec{k} \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial p} \times \nabla \omega \right) \quad (5.130)$$

dove $\omega = \frac{dp}{dt}$ [vedi (5.21)] e \vec{U} è il vettore velocità orizzontale del vento.

5.22 – Analisi di scala dell'equazione della componente verticale della vorticità

Scaliamo l'equazione della componente verticale della vorticità, scritta nella forma cartesiana (5.129), usando come grandezze di scala i valori tipici riportati nel § 5.10, a cui si aggiunge il cosiddetto parametro β , definito da:

$$\beta = \frac{df}{dy} = 10^{-11} m^{-1} s^{-1} \quad (\text{parametro } \beta)$$

In base alle scale scelte, si ha:

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \cong \frac{U}{L} \cong 10^{-5} s^{-1}$$

da cui:

$$\frac{\zeta}{f_o} \approx \frac{U}{f_o L} \equiv R_o \approx 10^{-1}$$

Avendo scelto un tempo di scala avvertivo per ζ (in considerazione del fatto che i vortici sono trasportati dal flusso medio), si vede dal valore del rapporto $\frac{\zeta}{f_o}$ che la vorticità relativa è un ordine di grandezza inferiore rispetto a quella planetaria, per cui ζ può essere trascurato rispetto a f in molte espressioni, come ad esempio nella relazione:

$$(\zeta + f) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cong f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

Gli ordini di grandezza dei vari termini della (5.119) risultano inoltre essere:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial T}, u \frac{\partial \zeta}{\partial x}, v \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cong \frac{U^2}{L^2} \cong 10^{-10} s^{-2};$$

$$w \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cong \frac{UW}{LD} \cong 10^{-11} s^{-2};$$

$$v \frac{\partial f}{\partial y} \cong U \beta \cong 10^{-10} s^{-2};$$

$$f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cong f \frac{U}{L} \cong 10^{-9} s^{-2};$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \cong \frac{WU}{DL} \cong 10^{-11} s^{-2};$$

$$\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \cong \frac{\delta \rho \delta p}{\rho^2 L^2} \cong 10^{-11} s^{-2}$$

Trattenendo solo i termini dell'ordine di $10^{-10} s^{-2}$ nelle (5.129), otteniamo per i termini “più importanti” del moto sinottico:

$$\frac{d_h(\zeta + f)}{dt} = f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (5.131)$$

con:

$$\frac{d_h}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla$$

La (5.131) indica che la variazione a scala sinottica della vorticità assoluta seguendo il moto orizzontale è, in prima approssimazione, interamente dovuta all'effetto della divergenza. Inoltre, dalla condizione prima vista:

$f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cong 10^{-9} s^{-2}$, si deduce che $f \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ deve essere almeno⁽³⁴⁾

dell'ordine di $10^{-6} s^{-1}$.

Si conclude quindi che nei moti a scala sinottica la divergenza deve essere trascurabile rispetto alla vorticità planetaria [vedi anche anche l'equazione (5.70)].

⁽³⁴⁾ Altrimenti, dati gli ordini di grandezza degli altri suoi termini, l'equazione della vorticità (5.119) non potrebbe essere soddisfatta (il termine della divergenza sarebbe infatti un ordine di grandezza superiore a tutti gli altri).

5. 23 - Cenni sulla “Previsione del tempo meteorologico”.

Per previsione del tempo meteorologico si intende la previsione della successione “cronologica” degli stati futuri della circolazione atmosferica, basata sulla conoscenza del suo stato attuale, facendo uso delle equazioni dinamiche viste precedentemente.

Occorre, per fare ciò:

1. la conoscenza migliore possibile dello stato iniziale delle variabili del campo atmosferico;
2. la serie *chiusa* di equazioni predittive dell’evoluzione delle variabili del campo atmosferico;
3. efficienti e aggiornati metodi di integrazione numerica delle equazioni del punto 2.

Si ottengono, soprattutto sulle scale sinottica e globale, notevoli benefici semplificando le equazioni dinamiche complete con ipotesi di geostrofità e di condizioni idrostatiche. Infatti, tali ipotesi permettono di filtrare oscillazioni di tipo acustico e di *gravità* le quali altrimenti creerebbero un rumore di fondo che si amplificherebbe nel tempo e che ridurrebbe drasticamente l’estensione temporale (“range”) della previsione.

Le equazioni così semplificate costituiscono il cosiddetto *sistema quasi-geostrofico*.

5.23.1 - Rumore dovuto alle onde acustiche e di gravità.

Le oscillazioni acustiche e di gravità sono, in realtà, moti oscillatori “meteorologicamente” spuri, in quanto generati prevalentemente da errori, anche piccoli, nei dati iniziali, che si amplificano per via di certi termini non-lineari delle equazioni complete, risolte non analiticamente (perché impossibile) ma con metodi numerici discreti nel tempo e nello spazio.

Le conseguenze di tali oscillazioni spurie e della loro amplificazione, dovuta a *instabilità numerica dello schema “computazionale”*, sono delle onde di densità (o di gravità) e ciò spiega il loro nome.

Il rumore prodotto da tali perturbazioni crescenti arriva presto a nascondere le vere oscillazioni significative dell’atmosfera. Le leggi del moto, della conservazione della massa e della conservazione dell’energia, espresse nella loro forma analitica (continua nel tempo e nello spazio), mantengono confinate, sulla scala sinottica, le perturbazioni reali (nel senso che ne limitano e ne controllano dinamicamente la crescita), e ciò permette di dire che il campo di velocità tridimensionale a scala sinottica è descritto completamente (e, sia pure per un tempo limitato, con buona approssimazione) dal campo del geopotenziale.

5.23.2 – Il sistema quasi-geostrofico.

Si può dimostrare l’ultima affermazione del § precedente ponendo le equazioni viste nei capitoli precedenti in una forma particolare che definisce il cosiddetto *sistema quasi-geostrofico*.

La procedura che si segue consiste nel riprendere le equazioni del moto, di continuità, dell'energia e della vorticità, scritte nel sistema di riferimento isobarico (coordinate isobariche x, y, p), e nell'introdurre in esse alcune semplificazioni.

Incominciando dalle equazioni del moto nella approssimazione ageostrofica [equazioni (5.38)], in coordinate isobariche esse divengono:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - fv = -\frac{\partial\phi}{\partial x} \\ \frac{dv}{dt} + fu = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases} \quad (5.132)$$

dove:

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_p + u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad \omega \equiv \frac{dp}{dt}$$

L'equazione idrostatica in coordinate isobariche, come si è già visto, ha la forma:

$$\frac{\partial\phi}{\partial p} = -\frac{1}{\rho} = -\alpha = -\frac{R_d T}{p} \quad (5.134)$$

mentre quelle di continuità e dell'energia sono, rispettivamente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 ; \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} - S_p \omega = \frac{\dot{q}}{c_p} \quad \text{con } S_p \equiv -T \frac{\partial \log \vartheta}{\partial p} \quad (5.134a)$$

(a)

(b)

(c)

L'equazione dell'energia (5.134a), eliminando in essa T mediante la (5.133), diviene:

$$\frac{1}{R_d} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-p \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]_p + u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-p \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]_p + v \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-p \frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]_p \right\} - S_p \omega = \frac{\dot{q}}{c_p}$$

ossia

$$\frac{p}{R_d} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]_p + u \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]_p + v \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right]_p \right\} - S_p \omega = \frac{\dot{q}}{c_p}$$

da cui:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \frac{R S_p}{p} \omega = \frac{R_d T}{p c_p} \dot{q} = \frac{\alpha}{c_p} \dot{s} \quad (5.135)$$

Nei moti sinottici, il vento è essenzialmente orizzontale e sinottico

$$\vec{U} \cong \vec{i}u + \vec{j}v = \vec{V} \cong \vec{V}_g = \frac{\vec{k} \times \nabla_p \phi}{f}$$

Pertanto, nel primo membro della (5.135) è lecito, a scala sinottica, sostituire le componenti orizzontali u e v con i loro valori geostrofici, ossia:

$$u \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \cong \vec{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \quad (5.136)$$

Ricordando, infine, che nei moti sinottici il rateo di riscaldamento *diabatico*

$\left[\equiv \frac{ds}{dt} \right]$ é trascurabile, la (5.135) diviene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -\vec{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega \quad (5.137)$$

↓	↓	↓
Rateo di variazione locale di temperatura dovuto su una superficie isobarica	avvezione di temperatura dovuta al vento geostrofico su una superficie isobarica	riscaldamento (o raffreddamento adiabatico, ai moti verticali

La (5.137) è la prima equazione del sistema “quasi-geostrofico”.

Riprendiamo ora l’equazione della vorticità in coordinate isobariche (5.130) :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{V} \cdot \nabla (\zeta + f) - \omega \frac{\partial \zeta}{\partial p} - (\zeta + f) \nabla \cdot \vec{V} + \left(\frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial p} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) \quad (5.138)$$

↓	↓	↓	↓	↓
1	2	3	4	5

con $\zeta = \vec{K} \cdot (\nabla \times \vec{V})$

nella quale tutte le derivate orizzontali sono fatte a $p = cost.$

Il significato dei vari termini della (5.138) è già stato visto precedentemente.

Lo riportiamo nuovamente qui per maggior chiarezza:

1. → rateo locale di variazione della vorticità (verticale) relativa;
2. → avvezione orizzontale di vorticità assoluta $\omega_{a_z} = \zeta + f$;
3. → avvezione verticale di vorticità relativa $\omega_z = \zeta$;
4. → termine di divergenza (o convergenza): stiramento dei vortici;

5. → termine di inclinazione dei vortici avvettati.

L'analisi di scala dell'equazione della vorticità, fatta al § 5.22, ha mostrato che:

- i termini (3) e (5) possono essere trascurati;
- ζ può essere trascurato in confronto a f ;
- le componenti orizzontali u e v della velocità nel termine di avvezione (2) possono essere sostituiti dai corrispondenti valori u_g e v_g dell'equilibrio geostrofico;
- la vorticità relativa può essere sostituita dal suo valore geostrofico.

Un'altra semplificazione, detta **approssimazione di piano β** , può essere introdotta nella rappresentazione del termine di Coriolis f .

Sappiamo che f è funzione della latitudine θ , ossia di y . Se sviluppiamo f in serie di Taylor rispetto alla latitudine θ_o di un determinato punto considerato, otteniamo:

$$f = f_o + \beta y + \text{termini di ordine superiore}$$

con $\beta \Rightarrow \left(\frac{df}{dy} \right)_{\theta_o}$ e $y = 0$ a θ_o .

Nell'ipotesi di moti con sviluppo latitudinale piccolo rispetto al raggio terrestre, è possibile mantenere per f il valore costante f_o e, per la sua derivata [che compare nel termine d'avvezione orizzontale (2)], il valore (costante):

$$\frac{df}{dy} \Rightarrow \beta = \text{cost} \quad (\text{approssimazione di piano } \beta)$$

In tal modo, la (5.138) si riduce alla forma semplificata:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla_p (\zeta_g + f) - f_o \nabla_p \cdot \vec{V} \quad (5.139)$$

↓
diverso da
 $\nabla_p \cdot \vec{V}_g = 0$

con:

$$\begin{cases} \zeta_g = \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{\nabla_p^2 \phi}{f_o} \\ \vec{V}_g = \vec{k} \times \frac{\nabla_p \phi}{f_o} \end{cases} \quad (5.140)$$

E' importante notare che il vento orizzontale, nel termine di divergenza $f_o \nabla_p \cdot \vec{V}$, non è stato sostituito dal suo valore geostrofico \vec{V}_g che, come sappiamo, darebbe $\nabla_p \cdot \vec{V}_g = 0$ (5.70). Eliminando, nella (5.139), $\nabla_p \cdot \vec{V}$ con l'aiuto dell'equazione idrostatica $\nabla_p \cdot \vec{V} = -\frac{\partial \omega}{\partial p}$, la (5.139) diviene:

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = \vec{V}_g \cdot \nabla_p (\zeta_g + f) + f_o \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (5.141)$$

La (5.141) è la seconda equazione del *sistema quasi-geostrofico*. Ricordando la (5.140), che mostra come ζ_g e \vec{V}_g siano entrambi funzioni di F e delle sue derivate, si comprende come la (5.137) e la (5.141) formino un sistema *chiuso* di due equazioni in F e ω , ossia un sistema di equazioni prognostiche in F e ω .

Ricordiamo, infine, senza dimostrarla, l'equazione *quasi-geostrofica della vorticità potenziale*:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla\right) \left(\frac{1}{f_o} \nabla^2 \phi + f + \frac{f_o}{\sigma} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2}\right) = 0$$

che, ponendo:

$$q = \frac{1}{f_o} \nabla^2 \phi + f + \frac{f_o}{\sigma} \frac{\partial^2 \phi}{\partial p^2} \quad (\text{vorticit\`a potenziale quasi-geostrofica})$$

e:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}_g \cdot \nabla$$

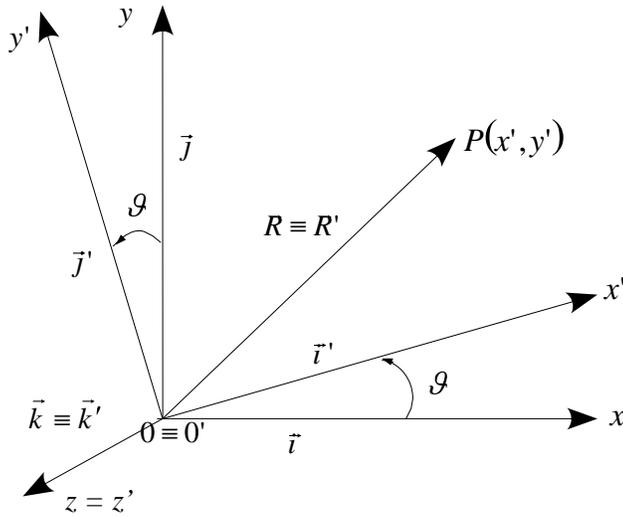
diviene:

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

q è una forma linearizzata della vorticit\`a potenziale $(\zeta + f) \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial p}$ definita con

l'equazione (5.128).

APPENDICE 5a



Con riferimento alla fig. (5.5), si deducono le seguenti relazioni fra i versori delle due terne O e O' :

$$\vec{i}' = -\vec{k}' \times \vec{j}' ; \quad \vec{j}' = \vec{k}' \times \vec{i}'$$

$$\dot{\theta} = \dot{\Omega}$$

$$\vec{i}' = \vec{i} \cos \vartheta + \vec{j} \sin \vartheta$$

$$\vec{j}' = -\vec{i} \sin \vartheta + \vec{j} \cos \vartheta$$

$$\Omega \vec{k}' \times \vec{i}' = \Omega j' = \frac{di'}{dt}$$

$$\Omega \vec{k}' \times \vec{j}' = -\Omega i' = \frac{dj'}{dt}$$

essendo:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \frac{d\vec{i}}{dt} \cos \vartheta + \frac{d\vec{j}}{dt} \sin \vartheta - \vec{i} \sin \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} + \vec{j} \cos \vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} (-\vec{i} \sin \vartheta + \vec{j} \cos \vartheta) = \Omega \vec{j}'$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = -\frac{d\vec{i}}{dt} \sin \vartheta + \frac{d\vec{j}}{dt} \cos \theta - \vec{i} \cos \theta \frac{d\theta}{dt} - \vec{j} \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} (-\vec{i} \cos \vartheta - \vec{j} \sin \vartheta) = -\Omega \vec{i}'$$

essendo $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = 0$

e

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = 0$$

Si ha infine:

$$\begin{aligned} \Omega^2 \vec{k}' \times (\vec{k}' \times \vec{i}') &= \Omega^2 \vec{k}' \times \vec{j}' = -\Omega^2 \vec{i}' = \frac{d^2 \vec{i}'}{dt^2} \\ \Omega^2 \vec{k}' \times (\vec{k}' \times \vec{j}') &= -\Omega^2 \vec{k}' \times \vec{i}' = -\Omega^2 \vec{j}' = \frac{d^2 \vec{j}'}{dt^2} \end{aligned}$$