CAPITOLO 8

ANALISI DIMENSIONALE E TEORIA DELLA SIMILITUDINE DINAMICA

8.1 – Introduzione.

La fisica dell'atmosfera fa ampio uso dei principi dell'analisi dimensionale e della teoria della similitudine, che da tali principi deriva, per superare le difficoltà che si incontrano allorché le soluzioni delle equazioni differenziali (o le equazioni stesse) descriventi un certo fenomeno risultano complicate, ovvero in tutti quei casi in cui, mancando un modello teorico del fenomeno fisico che si studia, occorre dedurlo, sia pure in forma approssimata, dai risultati di esperimenti che, generalmente, coinvolgono un numero piuttosto elevato di variabili fisiche.

Con l'applicazione di tali principi, vedremo come sia possibile non solo dedurre leggi fisiche espresse come relazioni fra grandezze dimensionali omogenee, o anche adimensionali, ma soprattutto analizzare (principio di similitudine) le condizioni che rendono due processi fisici, che si svolgono su scale spazio-temporali diverse, non solo geometricamente ma anche dinamicamente similari, aprendo così la strada a quella potente metodologia sperimentale di studio che è la *modellazione fisica.*

Tale metodologia permette infatti, attraverso opportune trasformazioni (dette di similarità), di ***proiettare***, in modo quantitativamente rigoroso e riproducibile, l’evoluzione reale di un processo fisico a scala naturale (che chiameremo “***prototipo naturale***”) sull’evoluzione del medesimo processo, rappresentato però su una scala ridotta (che chiameremo “***modello***”).

La teoria della similitudine che, come vedremo, è in grado di indicare le ***uniche*** trasformazioni di scala delle lunghezze, delle masse, dei tempi, ecc. che sono in grado di assicurare in modo esatto la corrispondenza fra l’evoluzione del prototipo naturale e del suo modello, permette inoltre di stimare l’importanza relativa dei vari termini che compongono le equazioni applicate ai diversi domini atmosferici ed eliminarne i meno influenti (giungendo così a ***rappresentazioni*** semplificate ma ancora approssimanti in modo soddisfacente la fenomenologia in esame).

Va ricordato che l’analisi dimensionale ha avuto origine dal tentativo di estendere alla fisica il concetto greco della similarità geometrica (basata sulle regole di uguaglianza di rapporti e proporzioni). Essa fu dapprima applicata da Galileo per prevedere la resistenza agli sforzi di una sbarra in funzione delle sue dimensioni lineari; Galileo concluse che il carico di rottura della sbarra, per unità di volume, era inversamente proporzionale alla sua lunghezza.

Si deve però a Fourier la prima formulazione quantitativa del principio della similitudine; egli infatti stabilì che esistono delle *grandezze fondamentali*, in termini delle quali ogni altra grandezza fisica ha precise *dimensioni* che si scrivono sotto forma di esponenti e che entrano nelle espressioni dei ben noti fattori di conversione che permettono la trasformazione delle grandezze fisiche da un sistema di unità di misura ad un altro.

Con dei semplici cambiamenti di unità di misura delle grandezze fondamentali, Fourier fu in grado di trattare il raffreddamento di una piccola sfera e quello della Terra con le stesse formule analitiche, facendosi così precursore di quell’altro importante metodo su cui si fonda gran parte della ricerca sperimentale riguardante i processi fisici dell’atmosfera, ossia la loro riproduzione attraverso *modelli* in laboratorio.

Illustreremo i fondamenti dell’analisi dimensionale e della teoria della similitudine a mano a mano che rappresenteremo i diversi modi secondo cui essi possono venire applicati. L’analisi dimensionale, pur costituendo, come si è detto, la base fondamentale su cui poggia la teoria della similitudine, non ne possiede però le caratteristiche induttive che rendono quest’ultima così preziosa nella fisica dei mezzi continui.

8.2 - L’analisi dimensionale.

L’analisi dimensionale si verifica che sia rispettato il seguente principio: **<<*perché due oggetti si possano confrontare fra di loro, devono essere definiti dalle medesime unità di misura*>>.**

Se suddividiamo le varie grandezze fisiche in classi omogenee, ricordiamo che - per misurare un particolare elemento di ciascuna classe - è necessario stabilire un sistema di ***unità di misura*** che risulti individuato ogni qualvolta che siano state scelte delle grandezze fondamentali (dette anche primitive) ***indipendenti***, ossia non esprimibili l'una in funzione delle altre e siano state

scelte, all'interno di ciascuna classe, quelle particolari grandezze che si assumono come unitarie. Così, se $\|b\|$ è quella particolare grandezza che si è assunta come unitaria nella classe di Grandezze Fondamentali [B] a cui appartiene una certa altra grandezza "b" (che è quindi ad essa dimensionalmente omogenea), diremo che $\|b\|$ é l'unità di misura di B e che quest'ultima può essere rappresentata dal prodotto simbolico $B = \mathrm{b} \cdot \|b\|$, dove b è un numero puro, reale e positivo, che viene detto ***"misura"*** della grandezza *B* rispetto all'unità $\|b\|$ prescelta. Può non essere inutile ricordare che $\|b\|$, essendo quella che, fra tutte le grandezze omogenee con "b", è stata assunta come unitaria, è essa stessa una grandezza.
In meccanica, sono primitive le lunghezze, le masse e i tempi e, nel particolare sistema *MKS*, l'unità delle lunghezze è il metro, quella delle masse è il chilogrammo e quella dei tempi è il secondo.

Esiste, comunque, la possibilità di scegliere in modo arbitrario la base delle grandezze fondamentali; una volta fatta tale scelta, però, tutte le altre grandezze che definiscono un qualsivoglia processo fisico dovranno essere espresse in termini di ***quella*** base di riferimento di grandezze fondamentali, arbitrariamente scelta.

In linea di principio, tutte le grandezze fisiche che conosciamo (meno una, ovviamente) potrebbero essere scelte come Grandezze Fondamentali (G.F.), nel qual caso si avrebbero solo Unità di Misura Fondamentali (U.d.M.F.) meno una.

In un caso siffatto, si avrebbe però ***una*** sola ***“equazione definitoria”***, dal momento che non sarebbe possibile scrivere equazioni definitorie fra Grandezze Fondamentali che, per assunto, sono fra loro indipendenti.

Che cosa si intende per ***“equazione definitoria”*** ?

Quando una grandezza fisica Y è funzione, in maniera rigorosamente nota, di altre grandezze fisiche x_1, x_2, x_3,….,x_n, si può scrivere che Y = Y(x_1, x_2, x_3,….,x_n): questa espressione prende, per l’appunto, anche il nome di “***Equazione Definitoria***”

Una volta definito il “Sistema di Unità di Misura (U.d.M.)” associato alle grandezze fondamentali prescelte, le altre grandezze che definiscono un qualsiasi processo fisico e che vengono anche dette Grandezze Derivate (G.D.) andranno espresse in termini di questa ***“base”*** di riferimento.

Detta ora ***B*** una di tali grandezze, ad esempio di tipo ***meccanico***, riferita - con una certa legge detta “equazione definitoria” - a un certo sistema di grandezze fondamentali, ad esempio [L, M, T], supponiamo che la sua ***“misura”*** diventi rispettivamente: 1) - $K_L^{n_1}$ volte più piccola in corrispondenza di un cambio arbitrario dell’unità di misura delle lunghezze di un fattore K_L volte più grande; 2) - $K_M^{n_2}$ volte più piccola in corrispondenza di un cambio dell’unità di misura delle masse di un fattore K_M volte più grande 3) - $K_T^{n_3}$ volte più piccola in corrispondenza di un cambio arbitrario dell’unità di misura dei tempi di un fattore K_T volte più grande.

Questa situazione viene sinteticamente e formalmente espressa mediante la cosiddetta equazione simbolica di Maxwell $[B]=[L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3}]$, la quale indica che B è omogenea di grado n_1 rispetto alle lunghezze, di grado n_2 rispetto alle masse e di grado n_3 rispetto ai tempi.

Gli esponenti n_1, n_2 e n_3, che possono essere numeri interi o frazionari e che possono ovviamente essere preceduti da segno positivo o negativo, sono le dimensioni di B rispetto al sistema adottato e l'equazione di Maxwell è pertanto detta equazione dimensionale.

Da essa consegue il fatto che, se passiamo da un certo sistema iniziale di unità, che indichiamo con $\| l_0, m_0, t_0 \|$, a un nuovo sistema $\| l_1, m_1, t_1 \|$, legato al primo dalle relazioni lineari esprimenti la trasformazione arbitraria delle U.d.M.F.:

$$\| l_1 \| = \| l_0 / \alpha \|; \quad \| m_1 \| = \| m_0 / \delta \|; \quad \| t_1 \| = \| t_0 / \tau \| \tag{8.1}$$

dove α, δ e τ sono numeri, allora la misura b_0 di B in $\| l_0, m_0, t_0 \|$, definita dall'equazione:

$$B = b_0 \cdot \| l_0^{n_1} \; m_0^{n_2} \; t_0^{n_3} \|,$$

si trasformerà nella nuova misura b_1 di B in $\| l_1, m_{1,} t_1 \|$, data da:

$$b_1 = b_0 \cdot \alpha^{n_1} \delta^{n_2} \tau^{n_3} \qquad (8.2)$$

per cui:

$$B = b_1 \cdot \left\| l_1^{n_1}\ m_1^{n_2}\ t_1^{n_3} \right\| = b_0 \alpha^{n_1} \delta^{n_2} \tau^{n_3} \cdot \left\| l_1^{n_1}\ m_1^{n_2}\ t_1^{n_3} \right\|$$

Le (8.1) e (8.2) corrispondono alla più generale condizione di omogeneità dimensionale che deve essere soddisfatta dalle relazioni fra grandezze fisiche e che è espressa dall'equazione simbolica di Maxwell $[B] = [L^{n_1} M^{n_2} T^{n_3}]$.

Tutto cio' equivale anche a dire che le ***"relazioni fra le grandezze fisiche sono definite dalle relazioni numeriche esistenti fra le loro misure."*** Si tratta di un principio assai importante, che deriva dal concetto di *misura*, e che verrà presto da noi utilizzato.

Il coefficiente:

$$\chi = \alpha^{n_1} \delta^{n_2} \tau^{n_3}$$

per cui bisogna moltiplicare b_0 per avere b_1 si dice *coefficiente di riduzione di* b_1.

Riferendoci , a titolo di esempio, all'equazione dimensionale della forza:

$$[F] = [LMT^{-2}]$$

che ne esprime simbolicamente l'equazione definitoria nel sistema fondamentale [L,M,T], il coefficiente di riduzione vale:

$$\psi = \alpha \delta \tau^{-2}$$

Inoltre, se i coefficienti di riduzione:

$$\chi_1 = \alpha^{n_{11}} \delta^{n_{21}} \tau^{n_{31}}; \quad \chi_2 = \alpha^{n_{12}} \delta^{n_{22}} \tau^{n_{32}}; \quad \chi_3 = \alpha^{n_{13}} \delta^{n_{23}} \tau^{n_{33}};$$

di tre grandezze B_1, B_2 e B_3 sono algebricamente indipendenti, ossia se il determinante delle dimensioni:

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{21} & n_{31} \\ n_{12} & n_{22} & n_{32} \\ n_{13} & n_{23} & n_{33} \end{vmatrix}$$

è diverso da zero, allora B_1, B_2 e B_3 sono dimensionalmente indipendenti.

Ricordiamo ancora quanto già detto in precedenza, ossia che è possibile scegliere come primitive grandezze qualunque, purché dimensionalmente indipendenti fra loro (in base alle loro equazioni definitorie).

Importanti, per gli sviluppi che analizzeremo in seguito a proposito della teoria della similitudine, sono le quantità ***adimensionali***, dette indici o numeri caratteristici, definite dai rapporti di misure di grandezze fisiche dimensionalmente omogenee:

$$\Pi_i = \frac{b_{k+i}}{b_1^{\alpha_{ij}} \, b_2^{\beta_{ij}} \ldots . b_k^{\gamma_{ij}}} \qquad \begin{matrix} (i = 1, \ldots, n-k) \\ (j = 1, \ldots, k) \end{matrix}$$

dove $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \ldots, \gamma_{ij}$ sono le dimensioni delle *(n-k)* grandezze B_i in un sistema in cui $B_1, B_2, \; . \; . \; . \; . \; , B_k$ siano simboli delle grandezze primitive e dove le *m* variabili B_m *(m=1, ..., n)* denotano tutte le varie quantità che intervengono nel fenomeno fisico in studio.

Tali indici sono, ovviamente, invarianti per trasformazioni arbitrarie delle unità di misura e, in virtu’ di questa proprieta’, rappresentano le grandezze che verranno utilizzate nelle equazioni fisiche dimensionali.

Cerchiamo di stabilire la condizione di omogeneita’ dimensionale che deve essere soddisfatta dalle relazioni fra grandezze fisiche e che e’ espressa dalla gia’ citata equazione simbolica di Maxwell, procedendo nel modo che segue.

Sia:

$$B = f\left(B_1,...,B_k\,;B_{k+1},\ldots,B_n\right)$$

una relazione funzionale indeterminata fra *n+1* grandezze fisiche B e B_m $(m = 1,.,n)$, la quale esprima, in forma ***dimensionalmente non omogenea,*** una legge fisica fra la quantità [***funzionalmente*** dipendente] B e le n quantità [***funzionalmente*** indipendenti] B_m, di cui le prime k siano state scelte come ***dimensionalmente*** indipendenti nel senso visto prima e abbiano pertanto il significato di grandezze primitive, o fondamentali, rispetto a cui esprimere le restanti *n-k* quantità (B, B_1, …….B_k; B_{k+1}, ………B_n).

Il modo più intuitivo di procedere è quello di comporre gruppi dimensionali, cioè esprimere le grandezze B e $\{B_l\}$ con (l = k+1,…….,n) in funzione di monomi, con esse dimensionalmente omogenei (secondo Maxwell), delle $\{B_j\}$ con (j = 1, 2,…….,k). Occorre però vedere se una relazione funzionale con tali grandezze dimensionali corrisponde poi, o equivale, alla funzione di partenza.

Si noti l’accento posto sulla differenza fra gli attributi “***funzionalmente***” e “***dimensionalmente***”

Si deve inoltre intendere che se, per talune delle B_m *(m = 1,….,n)*, sussiste uguaglianza di dimensioni, si lascia in evidenza una soltanto di esse e si sostituiscono le rimanenti con il loro quoziente rispetto a quella prescelta (ad esempio, se vi sono due velocità, v_1 e v_2 , si tiene v_1 e si sostituisce v_2 con il rapporto adimensionale v_2/v_1).
Eventuali ridondanze delle B_j*(j = 1,….,k)* rispetto alla *B*, ossia presenza di alcune B_j in eccesso rispetto a quelle essenziali a formare un monomio dimensionalmente omogeneo con *B*, non creeranno alcun problema, in quanto scompariranno nell'operazione di cambiamento delle unità di misura che vedremo più avanti [paragrafo 8.3.1]. L'argomento verrà ripreso quanto prima, nell'esempio del paragrafo 8.2.1.

Sia inoltre:

$$b = f\left(b_1, b_2, ..., b_k \; ; b_{k+1}, ..., b_n\right) \qquad (8.3)$$

la corrispondente relazione fra le misure delle *n+1* grandezze *B* e B_m che, per la corrispondenza vista precedentemente fra trasformazioni di misura e equazione dimensionale di Maxwell, noi useremo per le nostre considerazioni.
Per dedurre i principi fondamentali che devono valere per ogni legge fisica espressa nella forma (8.3), cominciamo ad immaginare che tale forma rappresenti l'equazione per il periodo di oscillazione di un pendolo:

$$T = f\left(g, l, \vartheta\right) \qquad (8.3a)$$

dove θ rappresenta l'angolo di oscillazione del pendolo.

La condizione più ovvia, e basilare, che deve essere soddisfatta è che le grandezze g, l, ϑ entrino come argomento della funzione *f* in modo tale che il valore numerico di quest'ultima cambi, quando vengono cambiate le unità di misura fondamentali, della stessa entità con cui cambia il valore numerico del periodo *T* a primo membro. Il Bridgman ha definito questa condizione come la proprietà *posseduta dai rapporti fra grandezze fisiche dello stesso tipo* di avere significato assoluto, indipendente dalle unità di misura prescelte. Ad esempio, esso non deve cambiare se cambia l'unità di misura delle lunghezze (o quella dei tempi, o entrambe).

Per l'angolo ϑ di oscillazione non vi è alcun problema, essendo esso una quantità adimensionale che rimane, pertanto, invariata. Invece, limitandoci qui alla sola unità di misura della lunghezza, diremo che la variazione del valore numerico di *l*, prodotta dalla variazione dell'unità delle lunghezze, dovrà essere compensata esattamente da una variazione del valore numerico di *g* prodotta dalla stessa variazione dell'unità di misura delle lunghezze. Perché ciò si verifichi, *l* deve venire diviso per *g*, ossia:

$$T = f\left(\frac{l}{g}, \vartheta\right) \qquad (8.3b)$$

In questa forma, l'equazione soddisfa il principio sopra enunciato, anche se non rappresenta ancora la legge cercata, in quanto non vi è ancora in essa l'omogeneità dimensionale che assicura anche l'invarianza per cambiamenti arbitrari delle unità di misura dei tempi.

Osserviamo che le *k* grandezze fondamentali debbono essere tali per cui sia possibile operare su di esse cambiamenti di unità di misura in modo *indipendente* e *arbitrario* (proprio perchè indipendenti e arbitrarie sono le grandezze fondamentali da noi prescelte) che lascino però invariata la (8.3).

In altre parole, la (8.3) deve essere riducibile a una relazione (***ad essa equivalente dal punto di vista fisico*** e avente pertanto le caratteristiche di ***legge fisica***) in cui le variabili che rappresentano le grandezze fisiche in gioco compaiano in combinazioni tali da fare in modo che - sotto qualsiasi trasformazione arbitraria e indipendente delle unità di misura fondamentali - i valori numerici delle misure delle grandezze a primo membro cambino della stessa entità (o che siano addirittura invariabili), ossia ancora che la relazione resti numericamente valida.
Supposto quindi che la funzione f resti invariata per cambi arbitrari delle unità di misura delle grandezze fondamentali, e richiamandoci ancora alla relazione che fa corrispondere i cambiamenti di unità di misura alla definizione dei gradi di omogeneità con le grandezze fondamentali (equazione dimensionale di Maxwell), è sufficiente trovare, fra tutti i cambiamenti arbitrari di unità di misura, uno che trasformi la (8.3) in una relazione, ad essa equivalente, fra quantità adimensionali (operazione di riduzione alle dimensioni zero). Infatti, tali quantità avranno grado di omogeneità zero con le grandezze fondamentali prescelte e saranno quindi indipendenti dal sistema di misura prescelto (relazioni *unit free*).

Effettuiamo la seguente trasformazione arbitraria di misura sulle prime k grandezze indipendenti, espressa dalla relazione:

$$\|b_1'\| = a_1^{-1}\|b_1\| = \|a_1^{-1}b_1\|; \ldots; \|b_k'\| = a_k^{-1}\|b_k\| = \|a_k^{-1}b_k\|$$

per effetto della quale la misura delle prime *k* grandezze indipendenti varia secondo la formula:

$$T_{a_j^{-1}}\left(b_j\right)\equiv\left\{b_1^{'}=a_1b_1,\ldots,b_k^{'}=a_k\,b_k\right\}\ \left(j=1,\ldots,k\right) \qquad (8.3c)$$

dove $\left\{a_j^{-1}\right\}\left(j=1,\ldots,k\right)$ è un insieme di numeri reali positivi qualsiasi.

A seguito di questa trasformazione arbitraria e indipendente, le altre *n-k+1* grandezze derivate [le B_l (con *l = k+1,. . . ., n)* e la *B* cambieranno invece le loro misure in modo né arbitrario né indipendente, bensì con i coefficienti di riduzione dati dalle relazioni (8.3d), qui di seguito riportate:

$$\begin{matrix} T_{a_j^{-1}}\left(b'_{k+i};b\right) \\ i=\left(1,\ldots,n-k\right) \end{matrix} \equiv \begin{cases} b_{k+1}^{'}=a_1^{p_1}\ldots a_k^{p_k}\,b_{k+1};\ldots;b_n^{'}=a_1^{q_1}\ldots a_k^{q_k}\,b_n; \\ \qquad b^{'}=a_1^{m_1}\ldots a_k^{m_k}\,b \end{cases} \qquad (8.3d)$$

La matrice:

$$D\equiv\left\{\begin{matrix} p_j \\ \ldots \\ \ldots \\ q_j \\ m_j \end{matrix}\right\}$$

(j = 1, . . . , k) delle dimensioni delle b_{k+i} *(i=1, ... ,n- k)* è di rango *r* il quale, al più, è uguale a *k* (è infatti uguale a *k* se tutte le unità di base entrano a definire le grandezze fisiche dipendenti dal fenomeno che si studia).

Le (8.3d) equivalgono, come si è gia' visto, alle seguenti equazioni dimensionali (8.4) per le grandezze derivate:

$$
\begin{aligned}
[B] &= \left[B_1^{m_1}\ B_2^{m_2}\ \ldots\ldots .\ B_k^{m_k}\right] \\
[B_{k+1}] &= \left[B_1^{p_1}\ B_2^{p_2}\ \ldots\ldots .\ B_k^{p_k}\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[B_n] &= \left[B_1^{q_1}\ B_2^{q_2}\ \ldots\ldots .\ B_k^{q_k}\right]
\end{aligned}
\qquad (8.4)
$$

Le (8.4), dette anche equazioni simboliche di Maxwell, equivalgono anche a dire che, ad esempio, *B*, diviso per il monomio $B_1^{m_1} B_2^{m_2} \ldots\ldots B_k^{m_k}$, è adimensionale, e che la stessa cosa vale per le altre variabili $B_{k+1}, \ldots\ldots, B_n$ divise per i monomi corrispondenti che compaiono a secondo membro delle equazioni di Maxwell.

Per quanto detto precedentemente, l'invarianza della (8.3) per cambiamenti arbitrari di unità di misura ha per effetto quello di far variare nella stessa entità i valori numerici dei suoi due membri (oppure a mantenerli invariati), qualunque sia il sistema di unità di misura adottato per le grandezze fondamentali.

Ossia, dovrà valere l'uguaglianza:

$$a_1^{m_1} \ldots\ldots a_k^{m_k}\, b = f\left(a_1 b_1, \ldots., a_k b_k; a_1^{p_1} \ldots . a_k^{p_k}\, b_{k+1}, \ldots\ldots, a_1^{q_1} \ldots .. a_k^{q_k}\, b_n\right) \qquad (8.5)$$

In virtù della ***arbitrarietà della trasformazione*** $T_{a_j^{-1}}\left(b_j\right)$**,** possiamo quindi, a questo punto, scegliere ciascuna a_j^{-1} coincidente con l'inverso della corrispondente misura b_j che essa trasforma, ossia porre:

$$\left\{a_j^{-1}\right\} = \left\{b_j\right\}$$

con il che le nuove unità di misura a cui si è passati sono rappresentate dalle prime k grandezze fondamentali [infatti: $\| b_j' \| = b_j \| b_j = B_j \|$].

Ciò darà alla (8.3c) e (8.3d) le seguenti forme particolari:

$$
\begin{aligned}
& b_j' = 1 && (j = 1, \ldots, k) \\
& b_{k+1}' = \frac{b_{k+1}}{b_1^{p_1} \ldots b_k^{p_k}} \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
& b_n' = \frac{b_n}{b_1^{q_1} \ldots b_k^{q_k}} \\
& b' = \frac{b}{b_1^{m_1} \ldots b_k^{m_k}}
\end{aligned}
$$

cosicchè la (8.5) diviene:

$$\frac{b}{b_1^{m_1} \ldots b_k^{m_k}} = f\left(1, \ldots, 1; \frac{b_{k+1}}{b_1^{p_1} \ldots b_k^{p_k}}, \ldots, \frac{b_n}{b_1^{q_1} \ldots b_k^{q_k}}\right)$$

Ciascuna delle $b_m' \left(m = 1, \ldots, n\right)$ e la b' risulteranno quindi *essere* le misure di grandezze fisiche (del tipo $\frac{B_{k+i}}{B_1^{\alpha_{ij}} \ldots B_k^{\alpha_{ij}}}, \ldots, \frac{B}{B_1^{m_1} \ldots B_k^{m_k}}$) adimensionali - per il principio di omogeneità dimensionale espresso dalla (8.4) - e la (8.3) risulterà equivalente (se è una legge fisica, infatti, essa deve essere invariante per trasformazioni arbitrarie di unità di misura) alla relazione:

$$\Pi = f\left(1, 1, \ldots, 1; \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}\right) \qquad (8.6)$$

con:

$$\Pi = \frac{b}{b_1^{m_1} b_2^{m_2} \ldots b_k^{m_k}}; \Pi_1 = \frac{b_{k+1}}{b_1^{p_1} b_2^{p_2} \ldots b_k^{p_k}}; \ldots; \Pi_{n-k} = \frac{b_n}{b_1^{q_1} b_2^{q_2} \ldots b_k^{q_k}}; \qquad (8.7)$$

Le quantità Π e $\Pi_j \left(j = 1, \ldots\ldots, n-k \right)$, combinazioni **adimensionali** delle grandezze di partenza, sono dette **parametri di similarità** o ***numeri caratteristici*** o, ancora, ***indici***.

In base alle equazioni dimensionali di Maxwell (8.4), le quantità adimensionali Π e $\Pi_j \left(j = 1, \ldots\ldots, n-k \right)$ sono indipendenti (numericamente) dalla scelta delle unità di misura delle grandezze fondamentali. Infatti, ad esempio:

$$\Pi_1 = \frac{b_{k+1}}{b_1^{p_1} \ldots\ldots b_k^{p_k}} \Rightarrow \frac{a_1^{p_1} \ldots\ldots a_k^{p_k}\, b_{k+1}}{\left(a_1^{p_1} b_1^{p_1}\right) \ldots\ldots \left(a_k^{p_k} b_k^{p_k}\right)} = \frac{b_{k+1}}{b_1^{p_1} \ldots\ldots b_k^{p_k}}$$

La (8.6) esprime il ***teorema* "Π"** di Vaschy (1982) e Buckingham (1914): una combinazione adimensionale **"Π"** della variabile dipendente ***b*** può sempre essere espressa come funzione di ***(n-k)*** combinazioni adimensionali **"Π_i"** delle variabili indipendenti, ***n*** essendo il numero di grandezze fisiche da cui ***b*** dipende e ***k*** il numero delle unità fisiche fondamentali prescelte. Ricordiamo ancora che i monomi adimensionali Π_j prendono anche il nome di ***indici***.

Se le k unità indipendenti $b_1 \div b_k$ non coincidono con le k unità fondamentali prescelte, le loro trasformazioni saranno del tipo (8.4), che rappresentano una generalizzazione delle (8.3c) e (8.3d). In ogni caso, il numero k di grandezze b_j dimensionalmente indipendenti non può superare il numero delle unità fondamentali del sistema di misura scelto (vedi l'osservazione fatta prima sul rango della matrice D delle dimensioni). Le relazioni (8.3c) e (8.3d) definiscono il gruppo dimensionale di tutte le trasformazioni lineari di unità fondamentali rispetto al quale le leggi fisiche sono invarianti. Il teorema Π

permette di ridurre il numero di variabili e questo rappresenta un notevole vantaggio anche dal punto di vista pratico, in quanto è più facile determinare sperimentalmente una relazione funzionale fra variabili ridotte Π e Π_i che non fra le *n+1* variabili di partenza.

Per riassumere, abbiamo visto che, dato un certo problema fisico, è possibile cercare alcune relazioni che devono essere soddisfatte dalle diverse grandezze misurabili che lo caratterizzano, senza doversi addentrare in analisi dettagliate della sua soluzione.

Per fare ciò, è necessario elencare dapprima tutte le grandezze $\boldsymbol{B_m}$ che si ritengono determinanti per il problema considerato, verificando che le variabili prese come indipendenti (le $\boldsymbol{B'_j}$) costituiscono un insieme completo di tutte le grandezze fondamentali in base alle quali è definita la variabile dipendente (***B***); successivamente, si scrivono le loro dimensioni e si richiede infine che tali grandezze siano combinate in una relazione funzionale in modo tale che la relazione rimanga vera e inalterata qualunque siano le unità di misura per le sopraddette grandezze.

Quest’ultima condizione è essenziale perché una relazione funzionale generica fra grandezze fisiche divenga una legge fisica. E’ infatti possibile dimostrare che le relazioni dimensionalmente omogenee sono anche ***unit free***, ossia indipendenti dalla scelta delle unità fondamentali e, quindi, di validità universale e assoluta.

Abbiamo anche visto che l’omogeneità dimensionale assicura, in particolare, che la relazione fra i valori numerici delle grandezze che compaiono nella legge fisica sia conservata per qualsivoglia cambiamento arbitrario delle unità di misura. Reciprocamente, la condizione di invarianza delle leggi fisiche implica che queste ultime debbano essere dimensionalmente omogenee.

8.2.1 – Esempi di fluidodinamica.

Esempio n° 1)

Supponiamo, se non ci è già noto dalle leggi fisiche, che la velocità v di fase di un'onda in uno strato profondo di fluido sia determinata dalla sua lunghezza λ e dall'accelerazione di gravità. Le fasi 1) e 3) precedentemente enunciate ci porteranno a scrivere la relazione:

$$v = f(\lambda, g) \tag{8.8}$$

la quale deve essere invariante rispetto a tutte le trasformazioni di unità fondamentali delle meccanica, per le quali *k=3* (fase *2*).
In questo esempio, il rango della matrice *D* è *r=2<k*, in quanto una delle tre unità, la massa, non entra in gioco nel processo fisico considerato.
L'invarianza rispetto alle trasformazioni (8.3c) e (8.3d), che fanno passare alle nuove unità di lunghezza e tempi con:

$$a_1 = \alpha^{-1}; \qquad a_2 = \tau^{-1} \tag{8.8a}$$

fa sì che la nostra onda, di lunghezza λ, che si propaga con velocità v nel campo gravitazionale g nel sistema fondamentale originario, debba avere lunghezza d'onda $\lambda' = \alpha\lambda$ e velocità $v' = \alpha\tau^{-1}v$ nel campo gravitazionale $g' = \alpha\tau^{-2}g$ nel nuovo sistema ottenuto con le trasformazioni (8.3c), (8.3d) e (8.4).
Applicando allora la (8.5), ossia scegliendo:

$$\alpha = \frac{1}{\lambda}; \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\lambda / g}} \tag{8.9}$$

si avrà:

$$\lambda' = g' = 1 \tag{8.10}$$

ossia, la (8.7) diverrà

$$\frac{v}{\sqrt{g\lambda}} = v' = f\left(\lambda', g'\right) = f\left(1,1\right) = C \tag{8.11}$$

La costante C è una costante universale che, per acqua profonda, vale $1/\sqrt{2\pi}$.

La legge (8.11) è, per definizione, invariante per trasformazioni delle unità fondamentali e, pertanto, vale nel nuovo come nel vecchio sistema di riferimento. Tale invariante è stato ottenuto dimensionando, e normalizzando, gli argomenti λ e g della funzione f con le grandezze λ e g stesse. Ciò ha corrisposto all'avere applicato la particolare trasformazione (8.9) alle unità fondamentali, con il che v è stato trasformato in $v' = v/\sqrt{\lambda g} = (2\pi)^{-1/2}$.

Possiamo anche dire, con altre parole, che la trasformazione (8.8a) ha indicato che v ha dimensioni +1 e –1 rispetto alle lunghezze e ai tempi e che g, rispetto a queste grandezze primitive, ha dimensioni +1 e –2. Pertanto $v' = \frac{v}{lt^{-1}}$ e $g' = \frac{g}{lt^{-2}}$ sono grandezze adimensionali, il cui valore numerico è dato dal rapporto fra le misure di v, di 1 e di t nel sistema di unità prescelto. Se le misure di lt^{-1} *e di* lt^{-2} sono rispettivamente $\lambda\sqrt{\frac{g}{\lambda}}$ e $\lambda' \frac{g}{\lambda'}$, allora $\lambda' = g' = 1$ e $v' = -\frac{v}{\sqrt{\lambda g'}}$.

La soluzione del problema, posto qualitativamente con la relazione (8.7), è data infine dalle relazione quantitativa e universale (8.11), che riscriviamo nella forma:

$$v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\lambda g} \qquad (8.12)$$

Questo primo esempio si riferiva a un problema in cui le $b_i(i = 1, ..., n)$ erano in numero *r* inferiore al numero *k* delle unità fondamentali; per questa ragione si è ottenuta la sola quantità dimensionale Π e nessuna delle quantità adimensionali Π_i (infatti il teorema Π stabilisce che si ottengono n-k o, se $r < k$, n-r quantità adimensionali o indici Π_i). Nel caso ora visto, $n = r = 2$ e quindi il numero di indici Π_i è uguale a zero. In generale, si tratta invece per processi fisici in cui $n > k$; sempre per il teorema Π, in questi ultimi casi si ottengono altre quantità adimensionali, le Π_i. che devono essere invarianti rispetto alle trasformazioni se le equazioni fisiche devono rimanere indipendenti dal sistema di riferimento.

Questa nuova situazione è analizzata nell'esempio 2 che segue.

Esempio n° 2)

La resistenza fluida ***D*** di un corpo rigido immerso, di diametro ***d***, sia determinata, oltrechè da caratteristiche inerziali (densità $\boldsymbol{\rho}$ e velocità ***v*** del fluido) e geometriche (la dimensione ***d***), anche dalla viscosità $\boldsymbol{\mu}$.
La legge:

$$D = f(\rho, v, d, \mu) \tag{8.13}$$

deve essere indipendente dalle trasformazioni delle unità fondamentali di massa , lunghezza e tempo.

Qui abbiamo ***n=4, r = k = 3, n – k = 1***, ossia ci dobbiamo aspettare dalla (8.7), oltre al rapporto dimensionale ***Π***, un indice caratteristico ***Π₁***. Una trasformazione delle 3 unità fondamentali riduce ***ρ,v,d*** a 1 e ***μ*** a $\frac{\mu}{\rho v d} = R_e^{-1}$

In altre parole, ***μ*** non è dimensionalmente indipendente, in quanto esprimibile in funzione di ***ρ,v,*** e ***d.***

La (8.13) diviene pertanto :

$$\frac{D}{\rho d^2 v^2} = f\left(1, 1, 1, \frac{\mu}{\rho v d}\right) = f(1, 1, 1, \Pi_1) \tag{8.14}$$

La quantità adimensionale $\Pi_1 = (\mu / \rho v d)$ è l'inverso del numero di Reynolds R_e.

La (8.14) si può allora scrivere:

$$D = d^2 \rho v^2 f\left(1, 1, 1, R_e^{-1}\right) = K_D(R_e) \rho d^2 v^2 \tag{8.15}$$

$K_D(R_e) = f\left(1, 1, 1, R_e^{-1}\right)$ prende il nome di resistenza aerodinamica.

Se il fenomeno fosse stato solo inerziale, ossia indipendente dall'attrito ***(μ)***, la (8.14) e la (8.15) sarebbero state rispettivamente:

$$\frac{D}{\rho d^2 v^2} = f(1, 1, 1) = C \tag{8.16}$$

ossia:

$$D = C \rho d^2 v^2 \tag{8.17}$$

In quest'ultimo caso, infatti, si sarebbe avuto $\boldsymbol{n = k = r = 3}$ [1]

Osserviamo ancora che nella (8.13) abbiamo fatto comparire ρ e μ separatamente nell'argomento della funzione *f*. Se esse fossero state introdotte già come rapporto μ/ρ (ossia come viscosità cinematica ν), la (8.15) sarebbe divenuta D = f (v, ν, d), relazione fisicamente assurda[2] nel sistema di grandezze fondamentali [L,M,T], in quanto le variabili indipendenti (v, ν, d) non costituiscono un insieme che includa tutte le unità fondamentali che definiscono *D* (vedere quanto osservato nella Appendice 8a, al fondo di questo Capitolo).

Fra la (8.15) e la (8.16) vi è un'importante differenza. Passando da un sistema di unità fondamentale ad un altro, l'invarianza della legge fisica espressa dalla (8.15) introduce anche l'invariante rappresentato dalla combinazione dimensionale delle grandezze funzionalmente indipendenti $R_e = \rho d v / \mu$. Per la legge fisica descritta dalla (8.16) ciò non è invece necessario; avendo qui ritrovato un solo $\boldsymbol{\Pi}$, quest'ultimo è l'unico invariante, ossia $\boldsymbol{\Pi = cost.}$

[1] Se fosse stato invece D = f (d, v, μ), ossia se si fosse trattato di un fenomeno caratterizzato da resistenza fluidodinamica puramente viscosa, si sarebbe avuto D = vdμ f(1,1,1), cioè:

$$D/vd\mu = \Pi = \text{cost.} \qquad (8.17a)$$

[2] E' però possibile individuare uno spazio tridimensionale, formato dalle variabili indipendenti (v, ν e d). ove poter scrivere una relazione determinata (ossia senza costanti dimensionali) fra *D* e le sopraddette grandezze, la cui equazione dimensionale sarebbe $[D] = [v^{\varepsilon}, \nu^{\eta}, d^{\vartheta}]$. Tale situazione viene discussa in modo più dettagliato nell'appendice A, alla fine del Capitolo 8.

Ciò, come vedremo, ha molta importanza nella teoria dei modelli, in relazione alle possibilità che si offrono di cambiare le scale senza violare la condizione di similarità fra prototipo e modello.

Unicamente per anticipare quanto si vedrà meglio in seguito, supponiamo di cambiare le scale di lunghezza, nella descrizione di un determinato processo fisico, così da passare dalla sua rappresentazione naturale a una su modello ridotto. In una siffatta applicazione dei principi dell'analisi dimensionale, potrebbe accadere che si volesse, o che si potesse, cambiare solo alcune fra le scale delle grandezze indipendenti (cosicché potrebbe accadere che gli indici non si conservino).

Di più ancora, può capitare talora di compensare le variazioni delle scale delle grandezze indipendenti, che compaiono a denominatore degli indici Π_i, con una corrispondente variazione della scala della grandezza dimensionalmente dipendente $b_{k+i}(i = 1, \ldots, n-k)$ che compare al numeratore; questo, per quanto si è prima visto, è in contraddizione con i principi dell'analisi dimensionale che , per le b_{k+i}, impongono cambiamenti di unità di misura non arbitrari.

Per comprendere meglio la portata di queste osservazioni, supponiamo di riferirci alla (8.16) e di raddoppiare, in essa, il termine d^2. Come conseguenza di ciò, vediamo, grazie anche alla (8.17), che anche D si raddoppia, con il che il termine $\Pi = D' = D/\rho v^2 d^2$ resta costante. Nella (8.15), invece, un raddoppio di d^2 produce un raddoppio di D solo se Π_i è identico nei due sistemi di unità, ossia, solo se anche Π_i è invariante. In caso contrario, l'invarianza della legge fisica viene soddisfatta da una diversa variazione di D, determinata dal rapporto che i valori di Π_i hanno nei due sistemi di unità.

La differenza fra i due casi è dovuta al fatto che le condizioni che hanno portato alla (8.16) ***(n = k = 2)*** assicurano sia la similarità geometrica sia quella dinamica (autosimilarità), mentre ciò non è più vero per la (8.15), nella quale il non verificarsi automatico dell'autosimilarità richiede l'introduzione di una condizione supplementare, che è la similitudine di Reynolds, la quale assicura anche la similarità dinamica.

Queste considerazioni rappresentano il fondamento del metodo della ***modellazione*** in laboratorio, su scale geometriche e dinamiche ridotte, dei processi fisici dell'atmosfera.

Le leggi stabilite con l'applicazione dell'analisi dimensionale sono infatti indipendenti dalle unità di misura nel senso che ogni riferimento fondamentale, arbitrariamente scelto, dà origine alle medesime leggi fisiche universali. Questo porta a concludere, con Tolman (1914), che le entità fondamentali con cui è costruito l'universo sono tali da consentire la costruzione di un universo in miniatura esattamente simile a quello reale.

Ora le leggi fisiche fondamentali, anche della meccanica classica, contengono spesso costanti dimensionali per cui non possono essere considerate indipendenti dalle unità fondamentali, ossia non danno luogo a leggi simili sotto trasformazioni arbitrarie delle unità di riferimento. Si pensi alla legge universale dell'attrazione gravitazionale di Newton, $F = \gamma \frac{mm'}{r^2}$, dove γ è una costante universale, avente dimensioni $M^{-1} L^3 T^{-2}$, introdotta per rendere la relazione dimensionalmente omogenea[3].

Anche le leggi della meccanica relativistica e quantistica divengono dimensionalmente omogenee solo attraverso opportune costanti dimensionali (velocità della luce, costante di Plank, ecc.), che non facevano parte degli ingredienti iniziali di relazioni generali del tipo (8.3).

La meccanica newtoniana dei continui, però, permette trasformazioni arbitrarie delle unità fondamentali di lunghezza, massa e tempo e da questo fatto discende la possibilità di operare con modelli. Diviene, anzi, possibile estendere ulteriormente l'idea di base di Fourier, Stokes e altri ed espressa dalle leggi di trasformazione [(8.3c), (8.3d) e (8.4)] e generalizzare il concetto di similitudine, che queste suggeriscono, in quello di *similarità dinamica*.

8.3 – Similarità dinamica e teoria della similitudine

L'analisi dimensionale non richiede altro se non la conoscenza, derivante dall'esperienza o dall' intuizione fisica, delle grandezze che entrano in un determinato problema. Essa, in tal modo, suggerisce, ma non prova,

---

[3] Questo caso è riconducibile a quanto detto a proposito dell'equazione (8.3a). Il rapporto fra F e $\frac{mm'}{r^2}$ vale - in questo caso – γ, che dipende dalla scelta delle unità di misura. Detto rapporto, quindi, non ha il significato di *assoluto* nel senso dato da Bridgman. Sappiamo anche che situazioni come questa, e come altre fra quelle degli esempi che seguono, sono conseguenza formale della scelta non solo del tipo, ma anche del numero di grandezze fondamentali, scelta che nei settori più avanzati della fisica può risentire di incompletezze conoscitive.

l'esistenza di relazioni funzionali (o leggi fra grandezze fisiche)[4].

Il teorema fondamentale appena dimostrato (teorema *Π*), pur determinando il numero di relazioni esistenti fra i parametri di similarità, non dà indicazioni riguardanti le variabili da cui una data quantità dipende (che, come detto sopra, devono essere dedotte in modo indipendente).

Una soluzione a questi problemi lasciati insoluti dalle teorie prima viste proviene invece dalla teoria della *similitudine*, la quale permette di applicare su scale diverse le leggi che descrivono processi fisici per i quali esista la cosiddetta *similarità*.

Così, quando le conoscenze in nostro possesso sono più ampie e già tradotte in equazioni esprimenti le leggi fisiche con le opportune condizioni al contorno e le eventuali costanti dimensionali, l'applicazione generalizzata dei metodi dell'analisi dimensionale a tale informazione aggiuntiva dà luogo a importanti sviluppi dei metodi finora visti.

Definiamo innanzitutto il concetto di similarità dinamica.

Si dice che esiste *similarità* fra due quantità quando è possibile metterle in relazione attraverso una costante dimensionale (indipendente dal sistema di coordinate) (o unità di misura). Più in particolare *similarità dinamica* fra due processi fisici significa la possibilità di descriverli con equazioni dinamiche che si corrispondono attraverso opportune trasformazioni, che equivalgono assai spesso a contrazioni e dilatazioni dagli assi coordinati (trasformazioni affini).

---

[4] Talora l'analisi dimensionale conduce a ricavare relazioni che sono *unit free*, ma che non hanno significato fisico.
Quando abbiamo ricavato, sulla base dei principi dell'analisi dimensionale, la legge (8.15) esprimente la resistenza fluida *D* in funzione delle grandezze (ρ, v, d, μ), abbiamo compiuto una scelta arbitraria nelle $\{a_{j^{-1}}\} = \{b_j\}$ che ha portato a ridurre all'unità le misure di *d,v* e *ρ*. Si sarebbe però potuto effettuare anche un'altra scelta, anch'essa pienamente legittima (data l'arbitrarietà della trasformazione di misura), la quale avesse ridotto all'unità le misure di *d, v* e *μ* . Quest'ultima scelta avrebbe condotto alla legge $D = dv\mu K_2(R_e)$, diversa dalla (8.15) e del tipo (8.17a), ricavata per condizioni di flusso viscoso.

Ad esempio, due moti fluidi Λ e Λ' sono dinamicamente similari quando possono essere descritti da sistemi di coordinate che sono messi in relazione, l'uno con gli altri, da trasformazioni delle unità fondamentali del tipo:

$$x_i^{'} = \alpha x_i; \quad t' = \tau\, t; \quad m' = \delta m \tag{8.18}$$

con *a*, *t e d* costanti indipendenti dal sistema di coordinate.

La similarità è allora data dalla condizione[5]:

$$\Lambda' = \lambda \Lambda$$

con λ detto anche *costante, o rapporto di similarità* ovvero *fattore di trasformazione Λ.*

Precisiamo meglio questi concetti.

Scelte inizialmente come grandezze primitive, o fondamentali, le lunghezze, i tempi e le masse, possiamo stabilire i concetti di similitudine cinematica e materiale che, insieme a quello di similitudine geometrica, sono alla base delle teoria dei modelli riproducenti processi dinamici. Le considerazioni che seguono sono comunque valide per qualunque altra scelta di grandezze primitive.

Iniziamo con il considerare due sistemi di punti *R* e *R'* , entrambi in moto riferito a un medesimo sistema di riferimento cartesiano ***O.*** Detti (t_o, t_i) e $(t_o^{'}, t_i^{'})$ gli intervalli di tempo in cui si osservano i moti di *R* e di *R'* rispettivamente, si stabilisca, fra gli istanti generici *t* e *t'* appartenenti agli intervalli sopraddetti, una corrispondenza espressa dalla relazione:

[5] si può anche dire che, se due processi sono similari, essi sono descritti dalla medesima equazione differenziale e le soluzioni che si ottengono sono legate fra loro da relazioni di proporzionalità (rapporti di scala, che possono equivalere a contrazioni o dilatazioni delle coordinate spaziali e/o temporali).

$$t - t_o = \tau\left(t' - t'_o\right) \qquad (8.18.a)$$

t e *t'* sono anche chiamati *istanti omologhi*.

Precisiamo meglio questi concetti.

Si dice che *R* e *R'* sono cinematicamente simili se è possibile trovare due terne *O* e *O'*, entrambe in quiete rispetto a *O*, tali che le figure *(R, O)* e *(R', O')* siano *geometricamente* simili per ogni coppia di istanti omologhi e che il rapporto di similitudine geometrica sia indipendente da *t* e *t'*.

In istanti omologhi, le velocità e le accelerazioni di punti appartenenti a sistemi simili hanno uguali orientazioni rispetto alle corrispondenti terne *O* e *O'*, mentre i loro moduli stanno nei rapporti costanti $\lambda\tau^{-1}$ *e* $\lambda\tau^{-2}$ rispettivamente.

Se i due sistemi *R* e *R'* sono costituiti di punti materiali per i quali esiste una corrispondenza biunivoca tale per cui le rispettive masse stiano fra loro in un rapporto costante *μ*, allora essi sono anche *materialmente simili.*

Poiché abbiamo supposto che *R* e *R'* siano geometricamente simili, la similitudine materiale si realizza per essi semplicemente usando il medesimo materiale per costituire le particelle omologhe.

Se due sistemi materialmente simili sono in moto, e se è possibile istituire una corrispondenza biunivoca fra i loro punti materiali e fra istanti omologhi di tempo tale per cui essi presentino contemporaneamente similitudine materiale e cinematica, allora i due sistemi si dicono ***meccanicamente***, o ***dinamicamente*** simili.

In altre parole, se due flussi di fluidi diversi intorno a corpi geometricamente simili e con le stesse direzioni iniziali di flusso mostrano linee di corrente geometricamente similari, allora si dicono anche *dinamicamente similari* o *flussi similari*. Perché due flussi intorno a corpi geometricamente similari (ad esempio sfere) con fluidi, velocità e dimensioni lineari diverse, siano dinamicamente similari, è necessario che, in corrispondenza di punti geometricamente similari, le forze agenti sulle particelle fluide siano in rapporti fissi ad istanti omologhi di tempo.

Chiariamo questi concetti con un esempio.

Supponiamo, per semplicità, che le forze agenti siano solo quelle di inerzia e quelle d’attrito (fluido incompressibile in moto orizzontale senza superfici libere o effetti di galleggiamento). In queste condizioni, la similarità è soddisfatta solo se il rapporto delle forze di inerzia e di quelle d’attrito è il medesimo in tutti i punti geometricamente corrispondenti.

Tali rapporti valgono:

$$\frac{Forze\ d'inerzia}{Forze\ d'attrito} = \frac{\rho u \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \equiv \frac{\rho U d}{\mu}$$

avendo supposto il moto lungo l’asse *x*.

L’ultima espressione scritta per il rapporto fra le forze in termini di valori caratteristici, o scale, mostra anche come le forze agenti cambiano al cambiare delle grandezze che determinano il flusso (ρ, U, d e μ). Quindi, la condizione di similarità è soddisfatta se la quantità $\rho Ud/\mu$ resta invariata al variare di ρ, U, d e μ nel passaggio da un flusso all’altro. Tale quantità prende il nome di numero di Reynolds: $Re = \frac{\rho U d}{\mu} = \frac{Ud}{\nu}$, con $\nu = \frac{\mu}{\rho}$.

Se, nei due flussi considerati, il numero di Reynolds assume valori diversi, che cosa accade ai campi di velocità e di forza allorché i corpi intorno a cui i fluidi scorrono sono geometricamente similari?

Indichiamo con *(x, y, z)* le coordinate di un punto nello spazio circostante corpi geometricamente similari; allora i rapporti *(x/d, y/d, z/d)* saranno le sue coordinate adimensionali. Le componenti della velocità possono essere rese adimensionali con la velocità di scala *U*, che è, ad esempio, la velocità asintotica del flusso (in punti lontani dai corpi); siano esse *(u/U, v/U, w/U)*, mentre gli stress normali (pressioni) e tangenziali (sforzi d'attrito) possono essere adimensionati con ρU^2: $(p/\rho U^2, t/\rho U^2)$.

Allora, il predetto principio di similarità dinamica può essere espresso in una forma alternativa, asserendo che per i due sistemi *geometricamente* similari con *uguali numeri di Reynolds* le quantità adimensionali $u/U^2, \ldots, p/\rho U^2$ e $t/\rho U^2$ dipendono unicamente dalle coordinate adimensionali *x/d, y/d* e *z/d.* Se, tuttavia, i due sistemi sono geometricamente, ma non dinamicamente similari, ossia hanno *numeri di Reynolds diversi* , allora le quantità adimensionali sopraddette devono dipendere anche dalle quantità caratteristiche V, d, ρ, μ dei due sistemi, organizzate in un momento adimensionale che è, per l'appunto, il numero di Reynolds *Re.*

Se esiste quindi similarità fra due processi fisici, deve essere possibile trasferite i risultati ottenuti per il primo al secondo, e viceversa. Le modalità del trasferimento sono fissate dall'applicazione delle (8.18) alle leggi fisiche dei due processi, seguendo il metodo già visto per l'analisi dimensionale, che conduce a equazioni in variabili adimensionali[6], i cui termini sono formalmente equivalenti alle quantità Π e Π_i.

Di norma, però, si applica una procedura equivalente ma semplificata, che consiste nel rendere adimensionali le equazioni utilizzando grandezze fisiche

[6] In tale forma, infatti, i vari termini delle equazioni della dinamica sono invarianti per cambiamenti di unità di misura fondamentali e i loro coefficienti dimensionali (i Π_i e Π prima visti), che rappresentano i rapporti fra le varie forze agenti, esprimono la maggiore o minore importanza di ciascuna di queste forze al variare delle scale del problema.

di riferimento, che chiameremo anche *valori caratteristici* o *grandezze di scala* (alcuni autori chiamano questo approccio *metodo degli indici*).

Con questa procedura, si ottengono equazioni adimensionali i cui coefficienti sono parametri adimensionali corrispondenti ai fattori Π e $\Pi_{i:}$ perché esista similarità dinamica, questi ultimi fattori devono risultare identici rendendo così identiche le equazioni per i due processi.

Se il numero di variabili fisiche è minore o uguale al numero di unità fondamentali, i fattori Π_i non compaiono più[7] e le soluzioni delle equazioni fisiche, dette *auto-similari*, si mantengono inalterate sotto qualsiasi trasformazione arbitraria delle unità di misura, ovvero delle scale. Ciò significa anche che ogni variabile dipendente è funzione unica delle variabili indipendenti e tutte le soluzioni, se adimensionate in modo opportuno, tendono ad un' unica forma limite, con evidenti vantaggi nella modellazione fisica e nella presentazione dei risultati.

L'arbitrarietà consentita alla scelta del tipo e del numero delle grandezze fondamentali parrebbe, a prima vista, introdurre una corrispondente arbitrarietà nelle leggi fisiche risultanti, soprattutto per quanto concerne il numero di parametri di similarità (o indici caratteristici) Π_i, numero che è determinato dalla differenza *n-k* fra le grandezze significative del problema e quelle fondamentali. Ricordiamo, però, che se si amplia la base delle grandezze fondamentali, è necessario introdurre delle costanti dimensionali che rendano dimensionalmente omogenee le equazioni, Ad esempio, nel sistema $[L,M,T]$ l'equazione fondamentale delle dinamica si scrive $F=ma$ mentre, in un sistema che fosse scelto come dato da $[L,M,T,F]$, la stessa equazione si sarebbe dovuta scrivere $F=kma$, con $[k] = [L^{-1}\ M^{-1}\ T^{2}\ F]$[8)].

---

[7] Il fattore Π vale *1* (vedere esempio n. 1 cap. [8.3.1]) se esiste una relazione funzionale che lega fra loro le variabili indipendenti e quella dipendente.

[8] C. Castagnoli – Fisica Generale (meccanica-termodinamica), Levrotto & Bella 1984 pagg. 16 e 18.

Conseguenza immediata di ciò è che, all'aumento del numero di grandezze fondamentali, corrisponde un equivalente aumento (sotto forma di costanti dimensionali) delle grandezze significative del processo fisico considerato[9] con il numero dei Π_i resta invariato.

Se, al contrario, la base delle grandezze fondamentali viene ridotta, sappiamo che questo corrisponde a ipotizzare che fra talune di queste grandezze vi siano delle relazioni di dipendenza funzionale, in forma determinata (ossia con costante di proporzionalità numerica fissata), che trasformano grandezze fondamentali in grandezze derivate.

Esempio classico di ciò si ha nell'elettromagnetismo, ove è possibile esprimere la carica elettrica in termini di grandezze meccaniche; oppure in meccanica, ove la particolare scelta fondamentale $[L,T]$ porta ad esprimere, attraverso la legge dell'attrazione universale prima ricordata, la massa come grandezza derivata $[M] = [L^3T^{-2}]$.

In corrispondenza della riduzione delle grandezze fondamentali, anche fra le variabili significative del problema si stabiliranno relazioni funzionali che ne ridurranno il numero, cosicché la differenza n-k, e quindi il numero di Π_i, resterà invariata.

Il problema della definizione delle leggi fisiche si sposta ora da quello di identificare le grandezze significative (che ormai conosciamo perché compaiono nelle equazioni) a quello di riconoscere i più appropriati valori caratteristici, o grandezze di scala indipendenti, che ridurranno al minimo il numero di variabili adimensionali interdipendenti.

In tale operazione di riconoscimento si deve inoltre essere guidati dal criterio di ricercare valori delle grandezze che, come risulterà più chiaro nel seguito, diano alle grandezze adimensionate valori il più possibile prossimi all'unità.

---

[9] Ad esempio, con riferimento all'equazione (8.3) la grandezza B necessiterebbe di n-k costanti dimensionali per esprimere la sua misura in funzione delle misure delle n grandezze $B, \ldots . B_n$, ove tutte queste ultime fossero considerate fondamentali.

Questo è l’aspetto più delicato del problema, in quanto da un lato la corretta identificazione delle *vere* scale del processo riduce al minimo il numero delle condizioni da cui dipende la similarità (al limite, se le scale *essenziali* coincidono con le unità fondamentali, le equazioni divengono autosimilari e non compaiono più indici caratteristici che devono conservarsi). Dall’altro lato, però, una eccessiva riduzione del numero delle scale caratteristiche, che può essere fatta perché si presuppongono relazioni fra le scale che le rendono non indipendenti fra loro, riduce contestualmente l’informazione su strutture dinamiche e termodinamiche che, anche importanti, intervengono nel processo e che però non sono state riconosciute.

In questo modo, l’adimensionamento delle equazioni con le grandezze di scala, o *scaling*, dà gli ordini di grandezza dei vari termini che le compongono attraverso dei coefficienti numerici per cui essi vengono moltiplicati e i cui valori numerici variano al variare delle scale su cui si considerano i processi; tale scaling , pertanto, permette anche di valutare l’importanza relativa dei vari termini che vi compaiono e di procedere quindi a semplificazioni che consistono nel trascurare le quantità meno rilevanti nel particolare problema che si considera (analisi di scala). In tal modo le equazioni complete che, per quel problema, conterrebbero più informazioni del necessario, vengono *ridotte* a forme limite più semplici, dalle quali è poi possibile capire se la scelta delle grandezze di scala é stata, o meno, più appropriata dal punto di vista fisico.

Con particolare riferimento alle equazioni dinamiche (esprimenti l’equilibrio fra forze e accelerazioni), che sono quelle di maggior significato per noi, è possibile individuare la seguente procedura per l’adimensionalizzazione.

1. Si scelgono le grandezze di scala per ciascuna variabile; queste possono essere spesso rappresentate dai gradienti o dalle differenze e possono essere differenti per ciascuna *coordinata* cosicché alcune direzioni del

riferimento finale possono risultare contratte o dilatate rispetto a quelle corrispondenti del riferimento iniziale. La scelta più corretta sarà quella che darà grandezze adimensionate il cui ordine di grandezza si avvicini maggiormente all'unità.

2. Si effettua l'adimensionalizzazione e si dividono i vari termini dell'equazione adimensionata per quella quantità che riduce all'unità il coefficiente che moltiplica il termine ritenuto più importante nel problema in oggetto. Gli altri coefficienti, che moltiplicano i termini dell'equazione, rappresentano ora (dopo il processo di adimensionalizzazione e di normalizzazione) i rapporti delle forze caratteristiche,che originano i termini restanti, rispetto a quelle che danno origine al termine che abbiamo evidenziato; la loro grandezza è indice dell'importanza (o trascurabilità) del termine ad essi corrispondente.
3. Può accadere che uno dei parametri adimensionati assuma un valore estremo *(0* o *8);* in questo caso, che corrisponde alla situazione in cui una delle forze agenti può venire trascurata, l'equazione assume una forma limite (cancellando, nel primo caso, il termine corrispondente oppure trattenendo solo esso nel secondo caso) di più semplice soluzione ma contenente ancora la fisica essenziale del problema.
4. Le operazioni sopra elencate, e in particolare la 3), possono dar luogo a leggi approssimate che valgono in certe regioni atmosferiche e non in altre. Occorre pertanto interpretare con cautela i risultati ottenuti e confrontarli sempre con l'esperienza.

   Questa situazione si presenta spesso in atmosfera, soprattutto negli strati più prossimi alla superficie, per cui esistono valori caratteristici (o grandezze di scala) diversi per strati che si trovano ad altezze diverse dal suolo, cosicché si ottiene più di un'equazione limite a seconda dello strato che si considera.

8.3.1. – Esempi.

Esempio n. 1 – La legge della statica in atmosfera è del tipo [vedi Capitolo 3.3 della Statica]

$$\frac{dp}{dz} = f(\rho, g) \tag{8.19}$$

La (8.19) sintetizza tutta la nostra conoscenza sulle grandezze da cui dipende il rateo di variazione della pressione con la quota e corrisponde alla prima fase dell'analisi dimensionale, rappresentata dalla (8.1) e dalla (8.2), evidenzianti la trasformazione della misura di una certa grandezza fisica, allorché si passi da un Sistema di Unità ad un altro, legato al primo da relazioni lineari traducenti la trasformazione arbitraria delle U.di M.F. (8.1).
In base a quanto visto prima, effettuiamo quindi una trasformazione delle unità fondamentali definita dai parametri $\{a_j\} = [\delta, \alpha, \tau]$ [vedi eq. (8.5)], ricordando che i fattori *d, a* e *t* rappresentano gli elementi della matrice $\{a\}$ della trasformazione T_a delle unità di misura fondamentali, scelte qui rispettivamente come masse, lunghezze e tempi (ossia $m' = \delta m, l' = \alpha l, t' = \tau t$).
La (8.19) contiene a secondo membro 2 grandezze dimensionalmente indipendenti, ρ e g, che definiscono la grandezza a primo membro. L'esempio scelto appartiene alla classe che conduce a equazioni autosimilari. Infatti le unità fondamentali della meccanica sono 3 e addirittura, in linea di principio, sarebbe possibile introdurre una quarta grandezza dimensionalmente

indipendente e ottenere ancora, attraverso una costante dimensionale, un'equazione autosimilare.

Applichiamo le (8.3c) e (8.3d):

$$\rho' = \delta\alpha^{-3}\rho;\ g' = \alpha\tau^{-2}g;\ \frac{d\,p'}{d\,z'} = \alpha^{-2}\delta\tau^{-2}\frac{d\,p}{d\,z} \qquad (8.20)$$

e la condizione di *arbitrarietà* (8.6) della trasformazione, ponendo:

$$\delta\alpha^{-3} = \rho^{-1};\ \ \alpha\tau^{-2} = g^{-1} \qquad (8.21)$$

per cui:

$$\alpha^{-2}\delta\tau^{-2} = (\rho g)^{-1} \qquad (8.22)$$

quindi:

$$\rho' = 1;\ \ g' = 1;\ \frac{d\,p'}{d\,z'} = (\rho g)^{-1}\frac{dp}{dz} = f(\rho', g') = f(1,1) = c \qquad (8.23)$$

La (8.23) è, come ci si aspettava, una relazione autosimilare.

La costante, in questo caso, è $c = -1$, per cui la legge cercata è:

$$\frac{d\,p}{d\,z} = -\rho g \qquad (8.24)$$

Partiamo ora dalla (8.24) per vedere come l'applicazione dei criteri di similitudine ci portino alle stesse conclusioni (autosimilarità) a cui eravamo giunti (8.23) con la teoria dimensionale. Procediamo pertanto ad una adimensionalizzazione della (8.24), che può ora tenere anche conto delle condizioni al contorno di un eventuale problema specifico. Per quanto prima detto, tale nuova adimensionalizzazione verrà fatta con i valori caratteristici, i quali permettono di determinare l'importanza dei vari termini che compongono l'equazione attraverso i coefficienti dimensionali (o fattori di similarità). Il modo più elementare (anche se non il più corretto) di procedere, quando del processo fisico in studio si sa poco o nulla, è quello di prendere tanti valori caratteristici quante sono le variabili in gioco. Nel caso che stiamo considerando, indichiamo allora con p_o, H_o, ρ_o, g_o tali valori caratteristici con cui adimensioniamo le variabili p, z, ρ e g, supponendoli, per il momento, indipendenti (non dal punto di vista dimensionale, bensì sotto il profilo puramente fisico).

Ponendo:

$$p' = \frac{p}{p_o}; \quad \rho' = \frac{\rho}{\rho_o}; \quad z' = \frac{z}{H_o}; \quad g' = \frac{g}{g_o} \tag{8.25}$$

si ottiene:

$$\frac{d\left(p' p_o\right)}{d\left(z' H_o\right)} = -\rho' \rho_o g' g_o \tag{8.26}$$

da cui:

$$\frac{dp'}{dz'} = -\left[\frac{g_o \rho_o H_o}{p_o}\right]\rho' g' \tag{8.27}$$

La (8.27), apparentemente, non è una relazione autosimilare (l'invarianza per cambiamento di unità di misura è condizionata da $\Pi_i = -\frac{g_o \rho_o H_o}{p_o}$), in quanto l'adimensionalizzazione adottata non ha sfruttato la condizione di arbitrarietà delle trasformazioni dimensionali; tale ultima condizione equivale a cercare, se esistono, relazioni che legano fra loro i valori caratteristici, così da renderli non più tutti indipendenti.

Vediamo di chiarire questa affermazione con qualche considerazione fisica. La (8.27) è stata ottenuta nell'ipotesi di quattro grandezze di scala indipendenti $(p_o,\ \rho_o,\ H_o,\ g_o)$ in un sistema di tre grandezze primitive. Ciò significa che non ci si aspetterebbe alcun Π_i e che il coefficiente adimensionale della (8.27) dovrebbe essere il Π che, in questo caso, non varrebbe 1 e rappresenterebbe il rapporto fra la forza peso $(\rho_o g_o)$ e la forza del gradiente verticale di pressione (p_o/H_o).

Poiché Π è definito da grandezze di scala, che sono costanti, il rapporto di forze che esso rappresenta è quello relativo anch'esso a un'atmosfera di scala; poiché $\rho_o = cost$, tale atmosfera è l'atmosfera omogenea, la cui altezza H_o non è indipendente dalle altre grandezze del problema, ma vale, come si è visto nel Capitolo 3:

$$H_o = \frac{p_o}{\rho_o g_o} \tag{8.28}$$

Si vede così che se H_o rappresenta un'altezza di scala legata alle altre dalla relazione (8.28), il rapporto fra le due forze diviene quello relativo all'equilibrio idrostatico (sia pure riferito ad un'atmosfera di scala, o standard) e, quindi, deve valere *1*, non solo per il particolare legame funzionale della (8.28) ma anche per ragioni di carattere fisico. In tal caso, la (8.27) si trasforma immediatamente nell'equazione dimensionale autosimilare:

$$\frac{d\,p'}{d\,z'} = -\rho' g' \tag{8.29}$$

Se l’altezza di scala H_o non è legata alle altre da una relazione del tipo (8.28), ma rappresenta, ad esempio, un’altezza indipendente, come lo spessore di uno strato convettivo dell’atmosfera, o l’elevazione media di una catena di montagne, il Π rappresenta un rapporto di forze (peso e di pressione) non necessariamente in equilibrio idrostatico e, pertanto, non vale *1*. L’analisi dimensionale, basata sull’arbitrarietà delle trasformazioni delle unità di misura fondamentali, avrebbe immediatamente (e automaticamente) optato per trasformazioni che avessero fatto uso di relazioni del tipo (8.28), in quanto queste producono il maggior numero di coefficienti dimensionali uguali a *1*. L’equazione (8.29) è valida in qualsiasi sistema di riferimento. Per ottenerla in questa forma, però, si è ridotto il numero di gradi di libertà del problema (H_o non è una grandezza indipendente: è però una altezza *termodinamica*; per questo si ha la relazione autosimilare).

Osserviamo, a questo proposito, la maggiore elasticità e capacità di interpretazione che la teoria della similarità offre rispetto all’analisi dimensionale. Se nella (8.19) avessimo introdotto anche una lunghezza fra gli argomenti della funzione *f*, ossia se avessimo posto:

$$\frac{dp}{dz} = f\left(\rho, g, H_o\right) \tag{8.29a}$$

(dove H_o poteva rappresentare , come abbiamo appena visto, sia un’altezza geometrica, sia un’altezza *termodinamica*), l’analisi dimensionale effettuata sulla (8.29a) avrebbe dato il risultato (8.24). La nuova grandezza H_o non avrebbe modificato la regola del “$n - k$” e quindi non sarebbe stata *sentita* sulla base di pure considerazioni dimensionali. Infatti, per queste ultime, H_o

sarebbe stata solamente vista nella sua dipendenza (dimensionale) dalla altre grandezze [eq. (8.28)].

La teoria della similarità offre invece anche la possibilità di vedere H_o come altezza di riferimento indipendente; contemporaneamente, però, introduce una nuova condizione restrittiva all'invarianza della legge per cambiamenti arbitrari di unità di misura.

Riassumendo, si passa da un sistema di misura ad un altro tenendo conto delle *contrazioni* o *dilatazioni* delle grandezze fisiche con le rispettive grandezze di scala.

Con ciò si è visto che anche grandezze derivate (come ρ e g) rispetto al sistema fondamentale [M,L,T], purché in numero inferiore o uguale a quello delle unità fondamentali e purché dimensionalmente indipendenti fra loro, possono essere trasformate arbitrariamente e dar luogo a leggi auto-similari (senza parametri aggiuntivi).

Inoltre, si è posta in evidenza l'importanza della scelta dei fattori di scala e delle conseguenze che una insufficiente conoscenza dei fenomeni fisici può avere sui risultati.

Esempio n. 2 - In casi più complessi, nei quali non è possibile ridurre il numero delle grandezze di scala a quello delle dimensioni indipendenti della base di riferimento che si è scelta, l'adimensionalizzazione delle equazioni produce parametri, che sono i coefficienti adimensionali dei vari termini, i quali non solo determinano l'importanza relativa dei termini che essi moltiplicano, ma anche stabiliscono le condizioni di similarità fra due processi fluidodinamici, condizioni che si esprimono con l'imporre che i suddetti parametri assumono gli stessi valori. Ciò é conseguenza del fatto che non tutte le trasformazioni possono godere ora della proprietà dell'arbitrarietà.

Le equazioni del moto, accoppiate alle equazioni di continuità e di conservazione dell’energia termica, offrono un importante esempio di quanto detto sopra.

Dette:

u_i	le componenti della velocità istantanea del fluido, ipotizzato come gas perfetto di composizione costante;
x_3	l’asse verticale (orientato verso l’alto);
d_p, d_T	le differenze di pressione e temperatura rispetto a quelle dell’atmosfera adiabatica alla medesima quota. Si ipotizza che siano piccole rispetto ai valori con cui si confrontano;
ρ_o, T_o	la densità e la temperatura dell’atmosfera adiabatica. La densità è supposta indipendente dalle fluttuazioni di pressione (ipotesi di Boussinesq, ovvero piccoli numeri di Mach);
v, k	la viscosità cinematica e la diffusività termica molecolare, supposte costanti;
$e_{ij\,k}$	il tensore alternante;
d_{ij}	il simbolo di Kronecker;
O	la velocità angolare della Terra,

le equazioni sono:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{u_j \partial u_i}{\partial x_j} + 2\varepsilon_{ijk} u_k \Omega_j = -\frac{1}{\rho_o}\frac{\partial \delta p}{\partial x_i} + \frac{g}{T_o}\delta T \delta_{3i} + \frac{\nu \partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \qquad (8.30)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (8.31)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} + u_i \frac{\partial \delta T}{\partial x_i} = k \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x_i \partial x_i} \, (i=1,2,3) \tag{8.32}$$

Nel sistema di unità fondamentali *[M,L,T,K]*, per cui è *k=4*, le tre equazioni differenziali (8.30), (8.31) e (8.32) equivalgono a una relazione del tipo: $\phi\left(u, x, t, \Omega, \rho_o, \delta p, \delta T, g, T_o, \nu, k\right) = 0$[10], che è invariante per trasformazioni arbitrarie a condizione che si conservino *11-1-4 = 6* indici Π e Π_i. Questo corrisponde a supporre che non esistono relazioni fisiche attraverso le quali alcune delle variabili in gioco dipendono da qualche altra. Si potrebbe invece pensare che ciascuna delle *11* grandezze di cui sopra sia esprimibile (funzionalmente) attraverso *4* sole unità fondamentali, che potrebbero essere le lunghezze, le masse, i tempi e le temperature prima dette, ovvero quattro grandezze, che chiameremo scale, scelte fra le *11* (altra scelta arbitraria delle unità). Se questo fosse fisicamente corretto, potremmo dire che il processo fisico descritto dalle equazioni di Navier-Stokes è definito da quelle sole *4* grandezze, le quali possono trasformarsi in modo arbitrario e mantenere invariate le equazioni (e le loro conseguenze, ossia le loro soluzioni) che saranno dette, in questo caso, autosimilari.

Per inciso, è immediato vedere che questa situazione sarebbe equivalente al dire che abbiamo scelto un sistema di *11 - 1 = 10* unità fondamentali indipendenti anziché *4*[11], il che escluderebbe la possibilità che sussistono relazioni fra le grandezze, per cui ci si troverebbe nella situazione per la quale il numero di indici Π_i deve essere uguale a zero.

---

[10] In cui ciascuna delle grandezze può, di volta in volta, essere vista come quella funzionalmente dipendente dalle altre *(n-1)*, e inoltre, *dT* e T_o, pur se *dimensionalmente* dipendenti, sono qui considerate *funzionalmente* indipendenti *(dT* è infatti un termine perturbativo indipendente dal campo medio T_o).

[11] Con l'inclusione, naturalmente, di *6* costanti dimensionali per esprimere la misura della variabile funzionalmente dipendente dalle altre *10* variabili del problema.

La particolare scelta delle scale fondamentali che noi ora facciamo per le equazioni [(8.30) ÷ (8.32)] corrisponde a due precise ipotesi fisiche che riducono di *2* il numero di gradi di libertà del sistema. Tali ipotesi sono:

a) - i tempi[12] che compaiono nei termini delle accelerazioni sono di tipo avvettivo, ossia definiti da L/U;

b) – le fluttuazioni di pressione dp sono legate alla velocità U del flusso e alla densità ρ del fluido dall'equazione di Bernoulli.

In questo modo, restano *9* grandezze funzionalmente indipendenti, o scale, di cui quattro si trasformano arbitrariamente. Siano, queste ultime, g, T_o, v, e k. Le altre *5* grandezze di scala verranno designate dai loro valori che contraddistinguono le condizioni tipiche del processo, indicate con $U_R, L, \rho_R, dT_R, O_R$. Le equazioni [(8.30) ÷ (8.32)] equivarranno ora alla relazione: $\psi(U_R, L, O_R, \rho_R, dT_R, g, T_o, v, k) = 0$, invariante per trasformazioni arbitrarie a condizione che si conservino $9\text{-}1\text{-}4=4$ indici Π_i e Π.

Ovviamente, se nell'ambito del sistema $[M,L,T,K]$ non si fossero fatte le due ipotesi a) e b) precedenti, e si fossero quindi trattenute tutte le scale, gli indici Π_i e Π sarebbero stati *6*.

In conclusione, se le *11* variabili del sistema [(8.30) ÷ (8.32)] di equazioni differenziali possono essere definite, nel sistema fondamentale di grandezze $[M,L,T,K]$, da *4,5,…..,11* scale, le condizioni di similarità del processo da esse descritto saranno definite da *0,1,….,6* indici Π_i e Π.

Adimensionando quindi con i valori caratteristici sopra definiti, si ottengono le nuove variabili adimensionali:

[12] Il fatto che si sia considerata anche una scala di tempi di rotazione $\left(\Omega_r^{-1}\right)$ *non significa* che sia stata introdotta una nuova grandezza fondamentale di tempo, in aggiunta a quella – derivata – di tempo *avvettivo*. Significa solo che la rotazione terrestre è considerata fra le grandezze che regolano il flusso atmosferico: il tempo resta uno soltanto.

$$x_i' = \frac{x_i}{L};\; u_i' = \frac{u_i}{U_R};\; t' = \frac{U_R}{L}t;\; \Omega_i' = \frac{\Omega_i}{\Omega_R};\; \rho' = \frac{\rho_o}{\rho_R};\; \delta p' = \frac{\delta p}{\rho_R U_R^2};\; \delta T' = \frac{\delta T}{\delta T_R} \qquad (8.33)$$

e le equazioni adimensionali [avendo diviso nella (8.30) tutti i termini per U_R^2 / L, nella (8.31) per U_R / L e, nella (8.32) per $\delta T_R U_R / L$]:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t'} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j'} + \frac{2}{R_o}\varepsilon_{ijk} u_k' \Omega_j' = -\frac{1}{\rho'}\frac{\partial \delta p'}{\partial x_i'} + \frac{1}{F_r^2}\delta T' \delta_{3i} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j' \partial x_j'} \qquad (8.34)$$

$$\frac{\partial u_i'}{\partial x_i'} = 0 \qquad (8.35)$$

$$\frac{\partial \delta T'}{\partial t'} + u_i' \frac{\partial \delta T'}{\partial x_i'} = \frac{1}{P_e}\frac{\partial^2 \delta T'}{\partial x_i' \partial x_i'} \qquad (8.36)$$

dove:

$$R_o \equiv \frac{U_R}{L\Omega_R}$$ numero di Rossby (8.37a)

$$F_r \equiv \frac{U_R}{\left(gL\frac{\delta T_R}{T_o}\right)^{\frac{1}{2}}}$$ numero di Froude densimetrico (8.37b)

$$R_e = \frac{U_R L}{\nu}$$ numero di Reynolds (8.37c)

$$P_e = \frac{U_R L}{k}$$ numero di Peclet (8.37d)

Le (8.34), (8.35) e (8.36), con le appropriate condizioni al contorno, determinano in modo completo il flusso; esse rappresentano un sistema di *5* equazioni nelle incognite $\left(u_1^{'}, u_2^{'}, u_3^{'}, \delta p' \, e \, \delta T'\right)$. Flussi governati da queste equazioni si dicono similari se, e solo se, sono descritti da soluzioni delle [(8.34) ÷ (8.36)] identiche fra loro. Soluzioni identiche si hanno se, e solo se, i coefficienti (o parametri adimensionali) R_o, F_r, R_e e P_e sono identici (insieme, ovviamente, alle condizioni al contorno)[13].

In altre parole, le soluzioni che si ottengono in questo caso più generale sono similari,ma non autosimilari, in quanto intervengono parametri che devono assumere valori identici se i flussi hanno da essere similari.

Pertanto, le grandezze indipendenti u_1, u_2, u_3, dp e dT , adimensionate con gli appropriati valori caratteristici, non sono unicamente funzioni delle altre grandezze indipendenti, esse pure *rese adimensionali* con appropriati valori caratteristici, ma dipendono anche da opportune loro combinazioni che definiscono quattro numeri R_o, F_r, R_e, P_e.

Il significato più importante dal punto di vista fisico (per le implicazioni che presenta con la metodologia della modellazione in laboratorio dei processi geofisici naturali) che si ricava dalle equazioni[(8.34) ÷ (8.36)]è il seguente: ogni flusso atmosferico (o oceanico) descritto dalle equazioni sopraddette può essere modellato da qualsiasi altro flusso, descritto anch'esso dalle medesime equazioni, purchè i numeri di Rossby, Froude, Reynolds e Peclet siano identici (e, ovviamente, siano identiche le condizioni al contorno).

Avendo definito tutte le grandezze fisiche che entrano nelle [(8.34) ÷ (8.36)] e, in particolare le velocità, come valori istantanei, queste equazioni si applicano indifferentemente a flussi laminari o turbolenti. Saranno poi i vari parametri, soprattutto il numero di Reynolds, e le condizioni al contorno, a

[13] Questa analisi ha anche mostrato che l'equazione generica di partenza:
$\phi\left(u, x, t, \Omega, \rho_o, \delta p, \delta T, g, T_o, \nu, k\right) = 0$ equivale alla relazione *unit free:* $\phi\left(1, 1, 1, 1, R_e, F_r, R_o, P_e\right) = 0$

determinare se il flusso è laminare o turbolento e, solo a posteriori, potranno essere presi in considerazione alcuni termini e trascurati altri (similitudine parziale).

Le procedure illustrate negli esempi ***1** e **2*** prendono anche il nome di *analisi ispettiva.*

Oltrechè esprimere le condizioni che devono essere soddisfatte per la riproduzione in laboratorio dei processi geofisici su modelli ridotti, le (8.37) rappresentano anche le condizioni di similarità fra flussi che interessano regioni atmosferiche diverse. Se tutti gli indici di similarità hanno gli stessi valori, i flussi sono dinamicamente similari; a seconda del tipo di flusso o della regione atmosferica considerata, alcuni di essi assumeranno valori piccoli rispetto ad altri, che risulteranno prevalenti. Di conseguenza, le equazioni descriventi i processi fisici nelle varie regioni dell'atmosfera tratteranno solamente i termini che moltiplicano gli indici prevalenti.

Abbiamo detto prima che le condizioni di similarità dipendono dalla nostra scelta delle scale.

E' interessante vedere quali condizioni di similarità si sarebbero avute per le equazioni di Navier-Stokes nel sistema fondamentale di *4* unità di misura se si fosse proceduto a scelte diverse delle scale.

I Ipotesi – *La rotazione terrestre non è una grandezza indipendente:*

O_R non rappresenta più un tempo di scala di riferimento, per cui la relazione fra le scale diviene ora:

$$\phi\left(L, U_R, \rho_R, \delta T_R, g, T_0, \nu, k\right) = 0$$

La rotazione O viene quindi scalata con il tempo avvettivo U_R/L, per cui:

$$u_k \Omega_j = u_k^{'} U_R \Omega_j^{'} \frac{U_R}{L} = \frac{U_R^2}{L} \Omega_j^{'} u_k^{'}$$

Poiché le (8.34) sono state ottenute dividendo tutti i termini per il fattore $\frac{U_R^2}{L}$, si vede che non compare più, fra i criteri di similarità, il numero R_o (di Rossby). Il termine che esprime l'accelerazione di Coriolis nelle (8.30) è quindi divenuto *autosimilare* in tutte le unità di misura.

II Ipotesi – *L'accelerazione di gravità non è una grandezza funzionalmente indipendente:*

Nell'adimensionalizzazione delle [(8.30) ÷ (8.32)] erano state prese, come unità fondamentali, g, T_o, ν e k in luogo di lunghezze, masse, tempi e temperature, per cui g era stato scelto con se stesso.

Sotto questa nuova ipotesi, si ha:

$$\phi\left(L, U_R, \rho_R, \delta T_R, T_o, \Omega_R\ \nu, k\right) = 0$$

e g deve venire scalato con $\frac{L}{U_R^2}$.

Si ha:

$$g = g'\frac{U_R^2}{L}$$

da cui:

$$\left(\frac{g}{T_o}\right)\delta T = \left(\frac{U_R^2}{L}\right)g'\delta T'$$

dividendo per $\frac{U_R^2}{L}$, si ottiene:

$$\left(\frac{g'}{T_o}\right)\delta T = \frac{\delta T_R}{T_o} g'\delta T'$$

Il nuovo criterio di similitudine $\frac{\delta T_R}{T_o}$ = *cost* è ben diverso dal precedente, espresso dalla conservazione del numero di Froude *(F_r)*. Esso corrisponde ora a una banale condizione di proporzionalità, per la quale si richiede solo che le deviazioni dT_R da T_o rimangano nel medesimo rapporto.
Notiamo come, in questo caso, l'accelerazione di gravità non appaia più nel suo ruolo di grandezza fisica indipendente dall'accelerazione inerziale $u(\partial u/\partial x) \rightarrow U^2/L$

8.4 – I modelli fisici.

Nel paragrafo [8.3.-Analisi dimensionale], al punto 2 delle procedure per l'adimensionalizzazione delle equazioni dinamiche, si è ricordato che i coefficienti delle equazioni adimensionali, o parametri di similarità, rappresentano i rapporti di tutte le coppie di forze (o accelerazioni) che intervengono nelle equazioni. A titolo di esempio, il numero di Reynolds R_e esprime il rapporto fra le forze di inerzia e quelle viscose.
Esprimendo tali forze per unità di massa con le scale caratteristiche, si avrà che $|\bar{a}| \equiv |\overline{U} \cdot \nabla \overline{U}| = \frac{U_R^2}{L}$, mentre $|\bar{f}_r| = |\nu \nabla^2 \overline{U}| \equiv \frac{\nu U_R}{L^2}$; quindi:

$$\frac{|\bar{a}|}{|\bar{f}|} = \frac{U_R L}{\nu} = R_e$$

Quanto abbiamo visto prima ci indica la possibilità di studiare un certo processo fisico operando su di esso dei cambiamenti di scala, o di unità di misura, che mantengono le condizioni di similitudine, ossia di creare una sua replica equivalente che chiamiamo modello. Più precisamente, diremo che, dato un sistema (o prototipo) *R*, che può essere una macchina, un fabbricato o addirittura anche un sito naturale, un suo modello in scala ridotta *R'*, costruito con i medesimi materiali per ciascuna delle parti omologhe che ci corrispondono in *(R, R')* e per il quale siano state realizzate le condizioni di similitudine meccanica, riprodurrà i valori e gli andamenti di ciascuna grandezza meccanica misurata in *R* in una scala corrispondente al rispettivo rapporto di similitudine.
Per i processi dinamici, la condizione di similitudine rispetto alle forze che essi devono soddisfare è ancora stabilita dalla similitudine meccanica, attraverso la cosiddetta *equazione di similitudine meccanica.*

8.4.1 – Esempio.

Se *M* e *M'* sono le masse delle particelle *P* e *P'* che si corrispondono nei due sistemi *R* e *R'* meccanicamente simili e se *F* e *F'* sono le forze totali agenti su *M* e *M'*, deve aversi:

$$F = Ma \text{ e } F' = M'a'$$

essendo *a* e *a'* le accelerazioni di *P*e*P'*. Per similitudine meccanica, le intensità delle forze omologhe, in istanti omologhi, devono stare nel rapporto costante di similitudine *(f)* dato da:

$$\varphi = \lambda \tau^{-2} \mu \tag{8.38}$$

Questa equazione di similitudine dinamica pone in relazione i quattro rapporti relativi alle lunghezze, ai tempi, alle masse e alle forze in condizione di similitudine meccanica. Assegnati tre di questi rapporti, il quarto resta determinato dall'equazione (8.38).

L'applicazione delle equazioni di similitudine ai modelli avviene nel modo seguente. Si parte in generale da un modello *r* di un prototipo *R* fissando i rapporti di similitudine geometrico *(λ)* e materiale *(μ)*.

Occorre allora procedere alla realizzazione delle condizioni di similitudine cinematica (essenziale per la similitudine meccanica). Per semplificare la situazione, supponiamo che le forze agenti su *r* e *R* siano forze peso che sono proporzionali ai volumi (essendo stata associata a priori la similitudine materiale). Si ha allora che le forze omologhe su *r* e *R* stanno fra loro nel medesimo rapporto λ^3 dei pesi:

L'equazione di similitudine dinamica (8.38) dà allora:

$$\tau = \sqrt{\lambda}$$

Essendo $\mu = f \quad = \lambda^3$ (essendo *g* una costante).

Nell'ipotesi, quindi, che le forze omologhe agenti sul modello e sul prototipo stiano fra loro nel rapporto λ^3 (come avviene per le forze peso), la similitudine meccanica richiede che il rapporto dei tempi sia la radice quadrata del rapporto di similitudine geometrica.

Concludiamo ricordando che le condizioni necessarie e sufficienti per la realizzazione della similitudine dei modelli fisici derivano dal teorema di Vaschy-Riabucinski-Buckingham, che va pertanto considerato come la base della teoria della similitudine e del metodo dei modelli fisici e meccanici.

Abbiamo infatti visto che, potendosi le grandezze $B_{k+1}, \ldots B_n$, esprimere come prodotti di numeri *s* per potenze di $B_1, \ldots, B_k$, la relazione (8.3) è equivalente alla forma:

$$B = f\left(\frac{B_1, B_2, \ldots, B_k}{s}\right)$$

ossia, per l'omogeneità di ordine *k* di *b* rispetto a $B_1, \ldots, B_k$:

$$B = B_1^{m_1}, B_2^{m_2}, \ldots, B_k^{m_k} \; f\left(\frac{1, 1, \ldots, 1}{s}\right)$$

Per vedere meglio come il teorema di Vaschy-Riabucinski-Buckingham (V R B) colleghi fra loro la teoria della similitudine e il metodo dei modelli, indichiamo con b_i e b_i' $(i = 1, \ldots, n)$ le misure di *n* grandezze meccaniche rilevate rispettivamente in *R* e in *R'* rispetto a *k* grandezze dimensionalmente indipendenti. Le b'_i si possono dedurre dalle b_i, moltiplicandole per i rispettivi coefficienti di riduzione; immaginiamo però di mantenere ora fisse le grandezze primitive, o fondamentali, e di misurare le b_i relative a *R'* , con riferimento a un nuovo sistema di *k* unità, scelto in modo che, rispetto ad esso, ognuna delle b_i sia espressa dallo stesso numero che misura la corrispondente b_i su *R*, rispetto al sistema fondamentale adottato prima. Il fenomeno analizzato relativamente a *R* e a *R'* è espresso dalla medesima equazione, dedotta dal teorema di (V R B), con gli stessi valori numerici delle variabili e dei coefficienti. Poiché il cambiamento di unità di misura che abbiamo operato sugli indici in *R'* non ha alcuna influenza sugli indici stessi, i loro valori dovranno essere identici, anche originariamente, per *R* e *R'*.

Si può quindi concludere che per la realizzazione della similitudine meccanica è necessario e sufficiente che si possa introdurre un sistema di unità di misura tale che le varie grandezze meccaniche del fenomeno siano misurate dagli stessi numeri sia nel modello sia nella macchina.

Ciò equivale a dire che nella riproduzione su modello di un fenomeno naturale occorre che il pattern del flusso nel prototipo sia una copia ingrandita e non distorta del "pattern" del flusso nel modello *(similitudine geometrica).*

In termini più quantitativi, si ha similitudine geometrica fra due sistemi quando è possibile far coincidere uno di essi con l'altro mediante un opportuno cambiamento di unità di misura delle lunghezze.

Si parla invece di *similitudine dinamica* fra due sistemi quando un opportuno cambiamento di unità di misura fondamentali (quelle della massa, delle lunghezze e dei tempi) permette di trasformare le equazioni del moto (e le condizioni al contorno) di un sistema in quelle dell'altro.

In un fluido di densità uniforme mosso da gradienti di pressione, per il quale si definiscono scale di velocità e lunghezza date da *U* e *L*, le forze agenti su di esse per unità di volume sono esprimibili, attraverso queste scale, come:

- forze di gradiente di pressione: $\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \frac{P}{L}$ (teorema di Bernoulli) $\rightarrow \frac{\rho U^2}{L}$
- forze di attrito: $\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{\mu U}{L^2}$
- accelerazioni inerziali: $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$, $\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \rho \frac{U^2}{L}$

Perché due moti siano dinamicamente similari, sappiamo che devono essere identici i rapporti delle forze agenti nei due moti e, poiché le forze si bilanciano nelle equazioni, occorre considerare solo il rapporto fra due di esse. Siano, queste ultime, le forze inerziali e quelle di attrito.

Il loro rapporto sarà (nelle scale):

$$\frac{forze\ inerziali}{forze\ d'\ attrito} = \frac{\dfrac{\rho U^2}{L}}{\dfrac{\mu U}{L^2}} = \rho \frac{U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu} = R_e$$

R_e = numero di Reynolds.

Pertanto, condizione necessaria per la *similitudine dinamica* di due fluidi (flussi) che siano *geometricamente similari* è che essi abbiano lo stesso numero di Reynolds R_e e le stesse condizioni al contorno.

Se $R_e < 1$, le forze d'attrito predominano su quelle inerziali e il pattern di flusso dipende essenzialmente dalla viscosità. E' quello che accade in prossimità di una superficie, ove $U \rightarrow 0$; anche se il ν dell'aria è piccola, $R_e \rightarrow 0$ e si dice che il flusso è regolato dalla viscosità e che i termini inerziali contano poco. Questo flusso è stazionario (le accelerazioni → 0) e laminare (regolare e riproducibile). Invece, lontano dalle superfici o da corpi immersi, U è grande e, quindi, anche $R_e >> 1$. Il flusso dipende poco dalla viscosità e molto dai termini inerziali. Si dice così che la viscosità, o meglio i suoi effetti sul flusso che si esercitano soprattutto attraverso i gradienti di velocità che qui sono elevati, si sentono vicino alle superfici e non a grandi distanze da esse, ove il flusso, non più controllato dalla viscosità (perché i gradienti di ν sono piccoli), può diventare *turbolento*. La regione per la quale $R_e \sim 1$, ossia dove i termini viscosi e quelli inerziali si bilanciano (o sono in equilibrio), prende il nome di *strato limite laminare.*

Si può quindi concludere che per la realizzazione della similitudine meccanica è necessario e sufficiente che si possa introdurre un sistema di unità di misura tale che le varie grandezze meccaniche del fenomeno siano misurate dagli stessi numeri sia nel modello sia nella macchina.

Dal criterio di uguaglianza dei parametri di similarità Π_i nel prototipo e nel modello, derivano semplici regole di similitudine, dette anche regole dei rapporti di scala. Un semplice esempio chiarirà il concetto. Siano R_e e R_e' i numeri di Reynolds del prototipo e del modello rispettivamente. Per similitudine, deve essere $R_e/R_e' = 1$, ossia:

$$\frac{R_e}{R_e^{'}} = \frac{\frac{UL}{\nu}}{\frac{U'L'}{\nu'}} = \frac{\frac{U}{U'}\frac{L}{L'}}{\frac{\nu}{\nu'}} = 1$$

Se ai rapporti $\frac{U}{U'}, \frac{L}{L'}$ e $\frac{\nu}{\nu'}$ si da il nome di rapporti di scala, o più semplicemente di *scale* (da non confondersi con la precedente definizione di scala), la condizione di similarità di Reynolds può essere così enunciata:

il numero di Reynolds formato con le <u>scale</u> di riduzione fra prototipo e modello deve essere uguale a 1

Similmente, per tutti gli altri criteri di similitudine.

Appendice 8a

Ponendo $\frac{\mu}{\rho}=\nu$ al posto di μ e ρ nell'argomento della funzione f della equazione (8.13) si ***"forza"*** una dipendenza rigida di D da μ e ρ unicamente attraverso il loro rapporto, mentre la (8.13) ne consente altre, più libere, da ρ e da μ considerate indipendentemente e separatamente, che permettono, fra l'altro, di ottenere le differenti leggi fisiche espresse dalla (8.15), (8.17) e (8.17a).

Possiamo, però, ragionare in modo più generale, abbandonando il sistema *[L,M,T]* e ponendoci nel sistema *[μ,ρ,v,d]*,nel quale vale una relazione determinata, fra *D* e la grandezze del sopraddetto sistema, la cui equazione dimensionale è: $[D]=[\mu^{\alpha}\rho^{\beta}v^{\gamma}d^{\delta}]$.

La differenza fra questa relazione e la (8.15) o la (8.17) è rappresentata dal fatto che le ultime due derivavano dall'ipotesi che solamente tre delle quattro variabili *(μ,ρ,v,d)* fossero indipendenti fra loro.

Se vogliamo ritornare da una rappresentazione in uno spazio a quattro dimensioni ad una in uno spazio a tre dimensioni, potremo definire l'unità di misura di una delle quattro grandezze *(μ,ρ,v,d)* in modo derivato dalle altre, così come viene fatto nel sistema di unità di misura di Gauss dell'elettromagnetismo, ossia porre $[\mu]=[\rho^{a}v^{b}d^{c}]$, per cui:

$$D = f\left(\rho^a v^b d^c, \rho, v, d\right) = k\left(\frac{\rho^a v^b d^c}{\mu}\right) g\left(\rho v d\right)$$

Si vede quindi che non è possibile giungere ad una relazione del tipo $D = f\left(\nu, v, d\right)$ con $\nu = \dfrac{\mu}{\rho}$; e che la proiezione su uno spazio di dimensionalità minore ha come effetto la creazione di una *condizione* fra la grandezze indipendenti del nuovo sistema ridotto. Se, infatti, avessimo voluto *forzare* una relazione del tipo $\left[D\right] = \left[\nu^{\varepsilon}, v^{\eta}, d^{\vartheta}\right]$, che fosse ovviamente stata equivalente alla precedente $\left[D\right] = \left[\mu^{\alpha}, \rho^{\beta}, v^{\gamma}, d^{\delta}\right]$, la grandezza sarebbe dovuta essere del tipo: $\left[\nu\right] = \left[\mu^{\alpha/\varepsilon}, \rho^{\beta/\varepsilon}, v^{(\gamma-\eta)/\varepsilon}, d^{(\delta-\nu)/\varepsilon}\right] = \left[\mu^{d}, \rho^{e}, v^{f}, d^{g}\right]$ e non semplicemente $\left[\nu\right] = \left[\mu, \rho^{-1}\right]$ come nel caso sopra ipotizzato.